МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

Л. В. Васильєва, О. А. Гончаров,

В. А. Коновалов, Н. А. Соловйова

Чисельні методи розв'язання інженерних задач у пакеті MathCAD

КУРС ЛЕКЦІЙ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник
з дисципліни "*Інформатика*"
для студентів вищих навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Краматорськ 2006

УДК 519.6
ББК 22.19
Ч 67

Рецензенти:

Каргін А. О., проф., д-р техн. наук, зав. кафедри КІТ, Донецький національний університет,

Рябухо О. М., доц., канд. фіз.-мат. наук, зав. кафедри алгебри, Слов'янський державний педагогічний університет,

Дьяченко О. І ., д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник, Донецький фізико-технічний інститут НАН України.

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/18-Г-807від 19.09.2006)

Васильєва Л.В., Гончаров О.А., Коновалов В.А., Соловйова Н.А.
В-19 Чисельні методи розв'язання інженерних задач в пакеті MathCAD. Курс лекцій та індивідуальні завдання: Навч. посібник з дисципліни «Інформатика» для студентів вищих навчальних закладів. – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 108 с.
ISBN 966-379-101-2.

Навчальний посібник містить відомості за такими темами: обчислення похідних та інтегралів, пошук розв'язків систем алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, побудова графіків функцій, пошук екстремумів функцій, засоби пошуку розв'язку звичайних диференціальних рівнянь, апроксимація функцій інтерполяційними поліномами, статистична обробка одномірного випадкового масиву, прогноз на підставі лінійної регресії. Посібник буде корисним при вивченні чисельних методів пошуку розв'язків задач за допомогою пакета MathCad.

УДК 519.6
ББК 22.19

ISBN 966-379-101-2

ЗМІСТ

ВСТУП

Пакети програм, що використовуються в середовищі Windows 2000 (і вище) є представниками нового покоління програмних продуктів, що істотно розвинули достоїнства й усунули недоліки попередніх версій програм, які підтримуються операційною системою Windows.

Пакет прикладних програм MathCad є універсальною системою, пристосованою до роботи з формулами, числами, текстами і графіками. MathCad дозволяє застосовувати при проведенні розрахунків математичні формули в їхньому звичному виді і вирішувати практично будь-яку математичну задачу або в символьному, або в чисельному вигляді. Можливості MathCad ефективно використовуються в різних галузях від проведення економічних (бухгалтерських) розрахунків до проектування електричних схем.

У даному навчальному посібнику викладені короткі зведення теоретичного характеру і розглянуті задачі, що найчастіше зустрічаються в інженерній практиці, розв'язання яких реалізується з використанням пакету MathCad.

1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПАКЕТА MathCad. ПРОСТІ АРИФМЕТИЧНІ РОЗРАХУНКИ

1.1 Загальні положення зведення пакета MathCad

Програма MathCad є універсальною математичною системою, що дозволяє здійснювати будь-які обчислення в їхньому звичному алгебраїчному вигляді. Вона містить текстовий, формульний і графічний редактори, цілком сумісні з операційною системою Windows.

Запуск MathCad здійснюється за допомогою головного меню Windows або будь-яким іншим способом, що дозволяє активувати даний програмний продукт. Вікно пакету (рис. 1) містить рядок заголовка (назва програми й ім'я документа) (1), рядок меню, що керує (2). Умовимося, що нумерація рядків виконана зверху вниз, а позицій у рядку – зліва направо. Основні пункти меню дублюються піктограмами (кнопками) керування (3, 4-й рядок).

Опції головного меню (рис. 1):

File / Файл – робота з файлами (2-1);
Edit / Виправлення – редагування (2-2);
View / Вид – зміна виду змісту робочого документа і панелей керування (2-3);
Insert / Вставка – вставка різних об'єктів і тексту у відкритий документ (2-4);
Format / Форматування – містить команди форматування відкритого документа (2-5);
Math / Математика – керування процесом обчислень (2-6);
Symbolics / Символи – вибір операцій для аналітичних розрахунків (2-7);
Window / Вікно – керування вікнами (2-8);
Help / Довідка – виклик довідкової системи (2-9).

Третій рядок у вікні програми – кнопки шаблонів математичних знаків – палітр, які можна переміщувати:

Calculator Toolbar/ Панель інструментів арифметичних операцій (3-1);
Grath Toolbar / Панель інструментів графіків (3-2);
Vector and Matrix Toolbar / Панель інструментів векторів і матриць (3-3);
Evaluation Toolbar/ Панель інструментів деяких знаків (3-4);
Calculus Toolbar/ Панель інструментів математичного аналізу (3-5);
Boolean Toolbar/ Панель інструментів математичної логіки (3-6);

Programming Toolbar/ Панель інструментів програмування (3-7);
Greek symbol Toolbar/ Панель символів грецького алфавіту (3-8);
Symbolic Keyword Toolbar / Панель символічних операторів (3-9).

Щоб перенести символ палітри в місце, позначене курсором, потрібно клацнути по обраній палітрі, розкрити її і клацнути по обраному знаку. Крім вищезгаданого, даний рядок містить піктограми керування шрифтами і положенням тексту в текстовій області.

Четвертий рядок – панель інструментів, що включає кілька груп піктограм.

Перша група – операції з файлами:
New / Новий (4-1);
Open / Відкрити (4-2);
Save / Зберегти (4-3);
Print / Друкувати (4-4);
Print Preview / Попередній перегляд (4-5);
Check Spelling / Перевірка орфографії (4-6).

Друга група – редагування:
Cut / Вирізати (перенести в буфер) (4-7);
Copy / Копіювати (в буфер) (4-8);
Paste / Вставити (перенести вміст буфера на місце вставки) (4-9);
Undo (Redo) / Скасування (Повтор) останньої операції (4-10, 11);
Align Across (Align Down) / Піктограми вирівнювання блоків (4-12, 13).

Далі йдуть:
Insert Function / Вставка функцій (зі списку в діалоговому вікні) - (4-14);
Insert Unit / Вставка розмірних одиниць (4-15);
Calculate / Обчислити виділене вираження (4-16);
Insert Giperlink / Вставка гіперпосилань (4-17);
Insert Component / Вставка компонентів (4-18);
Zoom / Масштаб екрана (4-19);
Resource Center / Центр навчання (4-20);
Help / Допомога (4-21).

Внизу екрана розташований рядок стану програми.

Довідкова система MathCad включає: спливаючу підказку при зупинці покажчика на кожній з піктограм; розділ **Resource Center / Центр навчання** (4 20) – довідник з математичних розрахунків із прикладами застосування і самовчитель; розділи допомоги **Help / Допомога** (4-21) – надання допомоги з усіх розділів програми. Комбінація клавіш **Shift+F1** при покажчику, установленому на досліджуваному елементі, дозволяє відкрити контекстну довідку про нього.

Варто врахувати, що послідовність відображуваних на екрані піктограм може бути змінена користувачем за своїм розсудом.

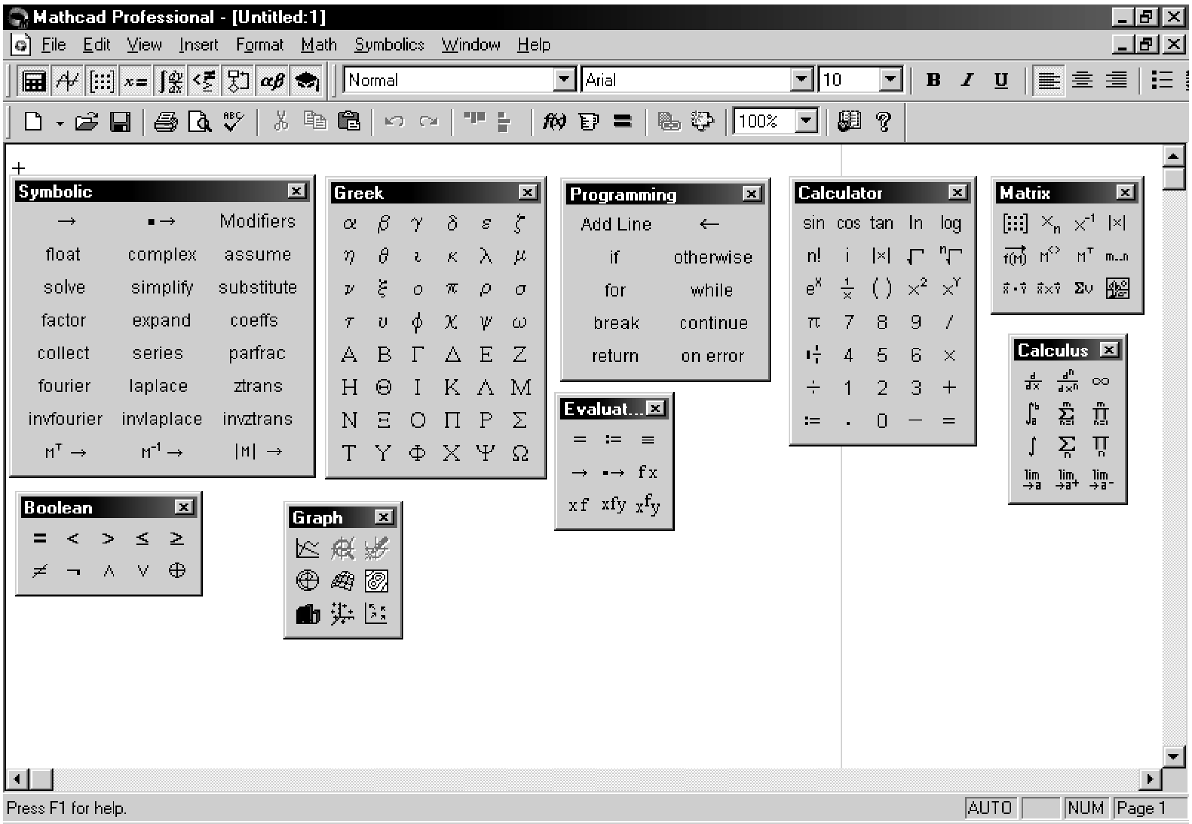


Рисунок 1 – Вікно програми MathCad Professional 2001

1.2 Прості арифметичні обчислення

Клацання у будь-якому місці документа викликає появу курсору у формі хрестика, що вказує місце введення виразу. Для визначення змінної після введення її імені ставиться символ **:=** (оператор присвоювання) і вказується значення, що присвоюється. Ліворуч від оператора присвоювання може стояти ім'я простої змінної **(*X*)**, індексованої змінної **(X_i чи $X_{i,j}$)**, матриці **(*M*)**, перемінної з верхнім індексом **(X^i)** чи функції ***F(x, y, z)*.**

Аргументом функцій можуть бути скаляри, вектори, матриці. Імена функцій, задані користувачем, варто набирати скрізь одним шрифтом. Імена вбудованих функцій не чуттєві до шрифтів. Їх можна вдруковувати чи вибирати зі списку – кнопка (4-14) **f(x)** (**Insert Function / Вставка функції**).

У якості десяткової коми використовується крапка. Результат обчислення виводиться на екран після набору символу =.

Команда **Math - Automatic Calculation / Математика - Автоматичне обчислення** включає / виключає автоматичний режим обчислення результату після набору знака рівності. При відключеному режимі автоматичного обчислення для перерахування потрібно натиснути клавішу **F9**. Переривання обчислень здійснюється кнопкою **ESC** чи клацання по знаку рівняння, або повторне натискання клавіші **F9** продовжить обчислення.

При виявленні помилки варто перейти до ручного режиму й переглянути попередні вирази, що можуть бути її причиною. Для видалення виразу, таблиці, графіка та ін. необхідно спочатку виділити об'єкт, а потім, після появи рамки навколо об’єкта, використовувати опцію контекстного меню – **Cut / Вирізати** або опцію меню **Edit – Delete / Редагувати - Видалити**. Копіювання об'єкта в буфер обміну відбувається аналогічно з використанням опції **Copy / Копіювати**.

Оператори, цифри, знаки вибираються з відповідних палітр (піктограм) рядка 3-9 (рис. 1) або вводяться з клавіатури. Вихід з-під знака оператора здійснюється переміщенням курсору за область цього оператора або натисканням клавіші **Enter**. Імена змінних повинні бути визначені раніше оператора функції. Вираз, що містить знак **:=**, впливає на документ нижче і праворуч від себе. Команда **Edit - Select All / Виправлення - Виділити все** чи протягання курсору при натиснутій лівій кнопці маніпулятора "миша" через документ дає можливість перегляду виділених областей, що не повинні перетинатися.

Визначені змінні (які мають прийняті значення за умовчанням) можна перевизначити **Math – Options / Математика – Параметри**.

За умовчанням установлені:

∞ - нескінченність, набуває значення 10^{307};

e - число e, набуває значення 2,71828182845905;

π - число **π**, набуває значення 3,14159265358979;

i - уявна одиниця, набуває значення 1i;

j - уявна одиниця, набуває значення 1j;

% - відсоток, набуває значення 0,01 (наприклад, $20 \cdot 30\% = 6$);

TOL - припустима погрішність обчислень, приймає значення 0,001;

ORIGIN - завдання індексу 1-го елемента матриці (вектора), приймає значення 0.

Приклад 1

Розрахувати значення арифметичного виразу в точці ***x* = *3*** (вид документа в MathCad).

$$x := 3$$

$$\sqrt{\frac{4}{e^{x}}} - \coth(x)^{3} \cdot \cos\left(\left|x \cdot \sin\left(x^{2}\right) - \ln(x)\right|\right) = -0.559$$

Питання для самоконтролю

1 Наведіть декілька способів завдання функцій в MathCad.

2 Способи редагування записів в MathCad.

3 Завдання / зняття режиму автоматичного обчислення.

4 Друк документів в MathCad.

2 ТАБУЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ. ФОРМАТУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

2.1 Табулювання функцій

Для обчислення значень функції в деякому діапазоні зміни аргументу спочатку необхідно визначити цей дискретний аргумент.

Наприклад, якщо потрібно табулювати функцію **y(t): = sin(t) - cos(t)** при зміні аргументу **t** в інтервалі **[-2; 2]** із кроком **0,5**, необхідно виконати такі дії:

1 Задати діапазон зміни змінної у вигляді:

$$t := -2, -1.5 .. 2$$

де **-2** - ліва межа інтервалу; **-1,5** - сума лівої межі інтервалу і кроку зміни змінної [*-2 + 0,5 = -1,5*]; **..** - оператор, що встановлюється за допомогою піктограми **Vector and Matrix Toolbar - Range Variable / Операції з векторами і матрицями / Діапазон змінної** (кнопка ); **2** - права межа інтервалу.

2 Задати функцію **y(t): = sin (t) – cos (t).**

3 Увести **t =** (на екран буде виведена таблиця значень t).

4 Увести **y (t) =** (на екран буде виведена таблиця значень y (t)).

Таблиці значень, що містять від 1 до 10 рядків даних, виводяться на екран повністю. У таблицях з кількістю рядків більше 10 на екран виводяться тільки перші 10 рядків. Для перегляду інших значень необхідно після виділення таблиці скористатися лінійкою прокручування. Вигляд документа MathCad:

$$t := -2, -1.5 .. 2$$

$$y(t) := \sin(t) - \cos(t)$$

$t =$

-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

$y(t) =$

-0.493
-1.068
-1.382
-1.357
-1
-0.398
0.301
0.927
1.325

2.2 Форматування результатів

Для того, щоб установити формат виводу даних, необхідно:

1 Виділити таблицю, клацнувши по ній мишею.

2 Вибрати пункт меню **Format – Result / Формат - Результат**. Опції цього вікна дозволяють встановити кількість десяткових знаків у виведених числах (**Number of decimal places**), межі використання експоненційного зображення чисел (**Exponential threshold**) і др.

3 За замовчуванням для **Exponential threshold / Поріг показника** приймається значення 3. Це означає, що тільки числа, більші чи рівні 102, відображаються в експоненційному вигляді.

При зміні формату висновку результатів змінюється тільки їх зовнішній вигляд. Внутрішнє зображення чисел MathCad завжди має повну точність.

2.3 Побудова графіків функцій у декартовій системі координат

MathCad надає можливості побудови двовимірних графіків у декартових і полярних координатах, ліній рівня, зображення поверхні, а також побудови ряду інших тривимірних графіків.

Точки, з яких складається графік, визначаються дискретними аргументами: MathCad наносить на графік одну точку для кожного значення дискретного аргументу.

Для того, щоб побудувати двомірний графік у декартовій системі координат функції **y(t)**, необхідно:

1 Клацнути мишею нижче (правіше) формули для **y(t)** і вибрати **Graph Toolbar - X-Y Plot / Графік - X-Y залежність:** кнопка або використати операційне меню **Insert - Grath - X-Y Plot/Вставка - Графік - X-Y залежність**). На екран буде виведений шаблон графіка (рис. 2).

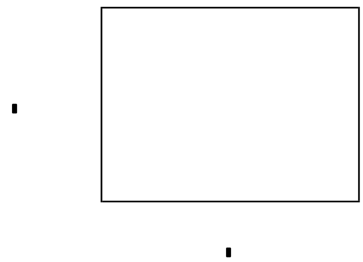


Рисунок 2 – Шаблон задавання параметрів для побудови графіка

2 У полі введення під віссю абсцис потрібно ввести ім'я змінної **t**, поставивши, таким чином, у відповідність до цієї осі змінну t.

3 Клацнути в полі навпроти середини осі ординат і ввести ім'я функції з обов'язковою вказівкою її аргументу **y(t)**. Поля, що залишаються призначеними для введення меж на осях (максимального і мінімального значень, що відкладаються на осі). Якщо залишити їх порожніми, MathCad автоматично заповнить їх за умовчанням при побудові графіка.

4 Після клацання поза графіком відбувається процес його побудови. Під ім'ям функції **y (t)** з'являється зразок креслення лінії. Подвійне клацання по вікну графіка чи використання **Format - Graph - X-Y Plot / Формат - Графік - X-Y залежність** дозволяє провести форматування зовнішнього вигляду графіка.

Діалогове вікно форматування графіка має чотири вкладки. Розглянемо дві з них (рис. 3, 4).

Склад вкладки **X-У Axes** (рис. 3):
Log scale – установка логарифмічного масштабу;
Grid lines – установка ліній масштабної сітки;
Numbered – установка цифрових даних по осях;
Auto scale – автоматичне завдання масштабу осей;
Show markers – нанесення рисок;
Auto grid – автоматична установка масштабних ліній;
Number of grids – установка числа масштабних ліній;
Boxed – рамка навколо графіка;
Crossed – пересічні осі;
None – відсутність осей;
Equal Scales – рівні масштаби.

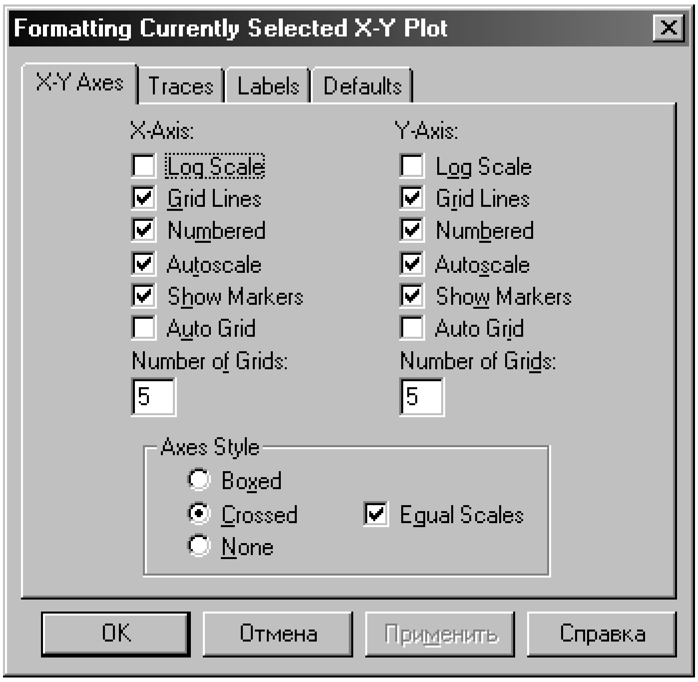


Рисунок 3 – Вікно форматування графіків. Вкладка X-У Axes

Мітки точок (**Symbol**), тип лінії (**Line**), колір (**Color**), товщину (**Weight**) і тип лінії (**Type**) графіка можна змінювати, використовуючи вкладку **Traces** вікна форматування графіка (рис. 4).

На одному рисунку можна побудувати декілька графіків. У середній квадрат по вертикалі вписуються через коми всі імена функцій або їхні визначення. Аналогічно в середній квадрат по горизонтальній осі заносяться аргументи функції (чи аргумент, якщо він один). Для побудови графіка необхідно клацнути мишею за його межами (або натиснути клавішу **F9**).

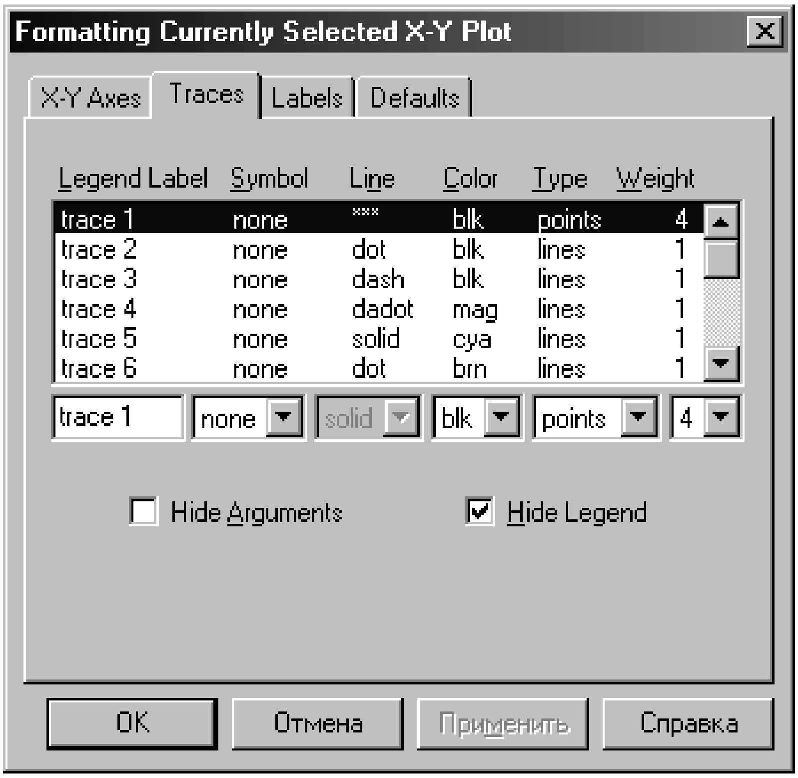


Рисунок 4 – Вікно форматування графіків. Вкладка ***Traces***

Виділивши поле графіка пунктирною лінією (клацнувши біля нього і протягнувши мишу, відпустити клавішу), можна потім перемістити на нього курсор, домогтися появи "долоньки" і, клацнувши, переміщати поле по робочому вікну. Для того, щоб розтягувати (звужувати) межі графіка, потрібно захопити курсором необхідну сторону і перемістити її.

Операції копіювання, видалення графіків відбуваються аналогічно діям з іншими об'єктами MathCad і описані раніше. Функції побудови необхідно визначати вище (ліворуч) від місця иведення макета.

Приклад 2

Побудувати графіки функцій

$$\mathbf{y\ (x) = 3 - cos\ (x^2)}\ \text{і}\ \mathbf{f(t) = 2 \cdot sin\ (2 \cdot t)}$$

на відрізку **[0; π]** з кроком зміни аргументу **π/64**.

Вид документа MathCad наведений на рисунку 5.

Точність відображення графіка функції залежить від кроку зміни аргументу: чим менше крок, тим більш "гладким" буде графік.

$$x := 0, \frac{\pi}{64} .. \pi \qquad t := 0, \frac{\pi}{64} .. \pi$$

$$y(x) := 3 - \cos\left(x^2\right) \qquad f(t) := 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

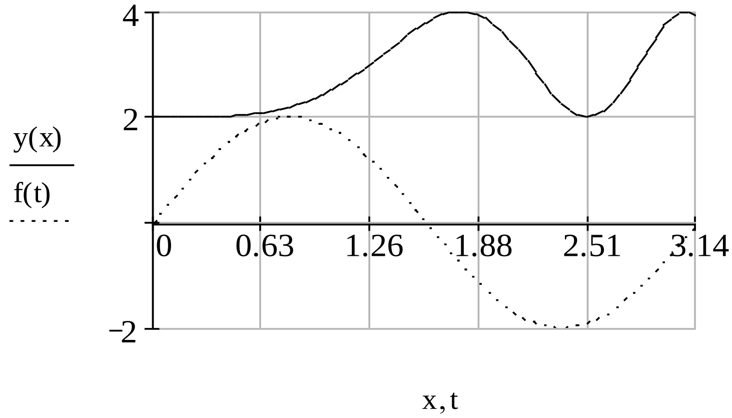
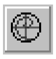


Рисунок 5 – Результат побудови графіків функцій у заданому діапазоні зміни аргументу в декартовій системі координат

2.4 Побудова графіків у полярній системі координат

У полярній системі координат кожна точка задається кутом **W** і довжиною радіуса-вектора **R(w**). Перед побудовою графіка необхідно вибрати його формат **Format - Graph - Polar Plot / Формат - Графік - Полярний графік**. Опції діалогового вікна, що задають відображення радіуса-вектора (**Radial**) і його кута (**Angular**), аналогічні вищеописаному випадку декартових координат. Можливе обрамлення графіка окружністю (**Perimeter**). Команда **Insert - Graph - Polar Plot / Вставка - Полярний графік** або кнопка  палітри інструментів **Graph Toolbar** виводить шаблон, що має форму окружності. Далі на шаблоні графіка треба вказати ім'я аргументу, ім'я функції, межі зміни довжини **R(w)**.

Порядок побудови графіка в полярній системі координат:

1 Вибрати місце для побудови графіка.

2 Одним з вищеописаних способів вибрати полярний графік. MathCad виведе на екран шаблон з чотирма полями для вводу.

3 Вище області графіка визначити кут **W** і функцію **R(w).**

4 Поле внизу шаблону призначене для вводу аргументу функції **R – w.**

5 Поле вводу ліворуч повинне містити вираз для радіус-вектора **R (w).**

6 Два поля введення праворуч призначені для верхнього і нижнього граничних значень радіуса. MathCad заповнює ці поля за умовчанням. Якщо потрібно, можна змінювати ці межі.

Щоб побудувати декілька графіків для різних виразів **R(w)**, що відповідають одному аргументу **w**, записують перший з виразів, супроводжуючи його комою. У полі вводу, що з'являється нижче, записують наступний вираз. При необхідності процес повторюють.

Приклад 3

Побудувати графік функції

$$\mathbf{R\,(w) = 2 \cdot (1 + cos\,(w))}$$

на відрізку **[0; 2]** із кроком зміни аргументу **0,01**.

Вид документа MathCad наведений на рисунку 6.

$$w := 0, 0.01 .. 2\cdot\pi \qquad R(w) := 2\cdot\left(1 + \cos(w)\right)$$

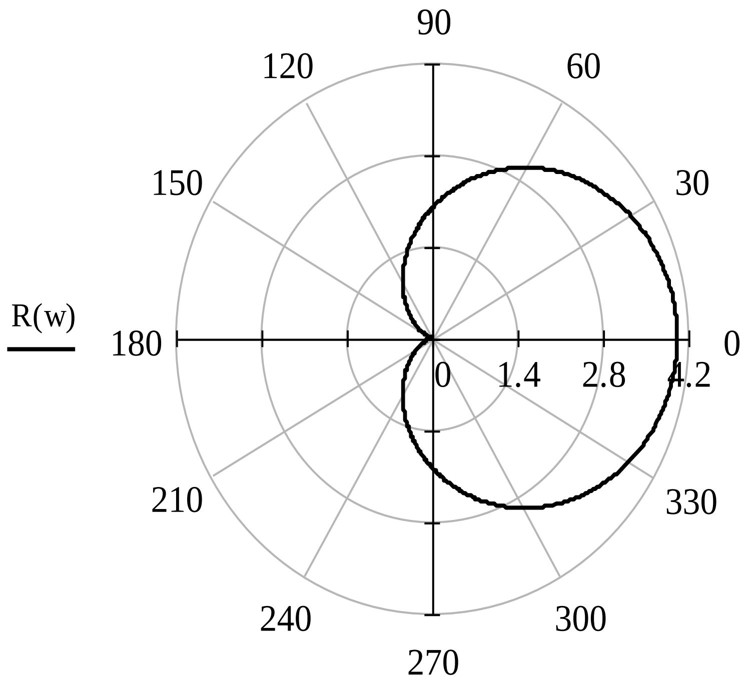


Рисунок 6 – Результат побудови графіка функції в заданому діапазоні зміни аргументу в полярній системі координат

2.5 Побудова графіка функції двох змінних

Для побудови графіка функції двох змінних необхідно:

1 Визначити саму функцію.

2 Записати кінцеві точки для зміни обох змінних.

3 Указати кількість точок розбивки по обох осях.

4 У загальному вигляді задати точки, у яких буде обчислюватися значення функції.

5 Визначити матрицю значень функції.

6 Для побудови графіка застосувати **Graf Toolbar - Suface Plot / Інструменти графіків - Графік поверхні** .

7 У шаблоні, що з'явився, вказати ім'я матриці значень функції.

Приклад 4

Для функції **f(x,y) = cos (x) + sin (y)** у діапазоні зміни **x ∈ [0; 2]** і **y ∈ [0; 2]** за допомогою пакета MathCad побудувати графік.

1 Задавання функції **f (x,y): = cos (x) + sin (y).**

2 Запис кінцевих точок відрізка по осі x: **xlow: = 0 xhigh: = 2.**

3 Задавання кількості точок розбивки по осі абсцис, ураховуючи кінці відрізка: **xn: = 20.**

4 Завдання кінцевих точок відрізка по осі ординат: **ylow: = 0, yhigh: = 2.**

5 Запис кількості точок розбивки по осі y, ураховуючи кінці відрізка: **yn:=20.**

6 Задавання діапазону зміни індексу i: **i: = 0..xn - 1.**

7 Задавання формули для обчислення значення змінної x: **$xind_i$: = xlow + i·(xhigh - xlow) / (xn - 1).**

8 Задавання діапазону зміни індексу j: **j: = 0..yn - 1.**

9 Задавання формули для обчислення значення змінної y: **$yind_j$: = ylow + j·(yhigh - ylow) / (yn - 1).**

10 Задавання матриці значень функції: **$M_{i,j}$: = f ($xind_i$, $yind_j$).**

11 Побудова графіка.

Вид документа MathCad наведений на рисунку 7.

$f(x, y) := \cos(x) + \sin(y)$

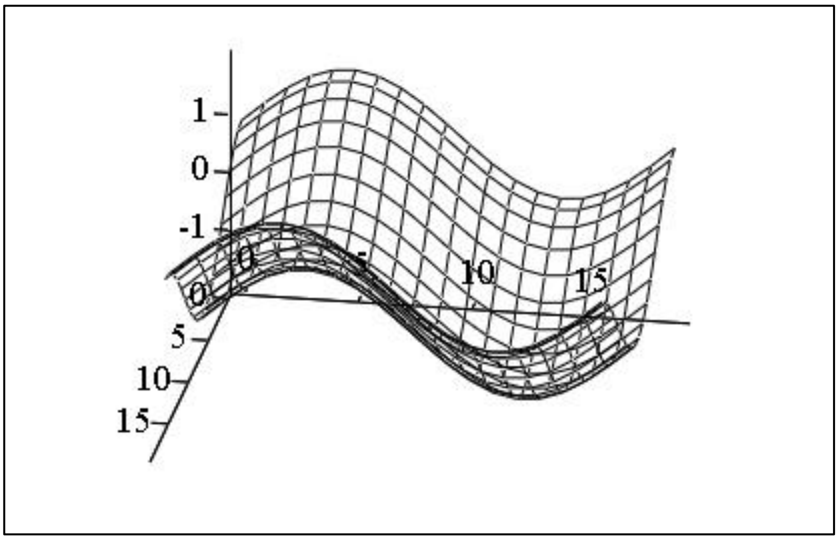
$xlow := 0 \quad xhigh := 2 \cdot \pi \quad ylow := 0 \quad yhigh := 2 \cdot \pi$

$xn := 20 \qquad yn := 20$

$i := 0 .. xn - 1 \qquad j := 0 .. yn - 1$

$$xind_i := xlow + i \cdot \frac{(xhigh - xlow)}{(xn - 1)} \qquad yind_j := ylow + j \cdot \frac{(yhigh - ylow)}{(yn - 1)}$$

$$M_{i, j} := f(xind_i, yind_j)$$



M

Рисунок 7 – Результат виконання прикладу 4

Питання для самоконтролю

1 Задати в MathCad діапазон зміни змінної **Z** в інтервалі **[-12 ; 4]** із кроком **0,005**.

2 Від чого залежить точність відображення ("гладкість") графіка функції?

3 Яким чином задається положення точок у полярній системі координат?

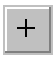
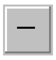
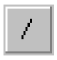
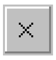
4 Як в MathCad змінити зовнішній вигляд графіку?

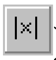
5 Як в MathCad побудувати декілька графіків на одному рисунку?

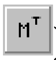
3 ВЕКТОРИ І МАТРИЦІ

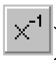
Прямокутна таблиця з **m** рядків і **n** стовпців, складена з виразів $\mathbf{a_{ik}}$, де **i = 1..m**, а **k = 1..n**, називається матрицею розміру $m \times n$. Вирази $\mathbf{a_{ik}}$ – елементи матриці. Положення елемента в таблиці характеризується подвійним індексом: перший індекс означає номер рядка, другий – номер стовпця. Елементами матриці є, як правило, числа, але іноді й інші математичні об'єкти, наприклад: вектори і навіть матриці.

Основні операції з матрицями:

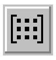
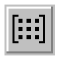
Додавання  , віднімання  , ділення  , скалярне множення  вибираються на панелі **Calculator Toolbar / Арифметичні інструменти** або вводяться з використанням клавіатури;

|M| - пошук визначника матриці, вибирається на панелі **Vector and Matrix Toolbar – Determinant / Векторні і матричні операції - Обчислення визначника** (кнопка );

$\mathbf{M^T}$ - транспонування матриці, вибирається на панелі **Vector and Matrix Toolbar - Matrix Transpose / Векторні і матричні операції - Транспонування матриці** (кнопка );

$\mathbf{M^{-1}}$ - пошук матриці, оберненої до матриці **M**, вибирається на панелі **Vector and Matrix Toolbar – Inverse / Векторні і матричні операції - Інверсія** (кнопка ).

Опис дій з матрицями:

1 Завдання матриці або вектора здійснює пункт меню **View - Toolbars – Matrix / Вид - Панелі інструментів - Матриця** (кнопка ) або сполученням клавіш **Ctrl + M**, або використовуючи піктограму  на панелі **Matrix or Vector / Векторні й матричні операції**. У вікні, що з'явилося, задають кількість рядків (**Rows**) і стовпців (**Columns**), після чого на екран виводиться шаблон матриці. Активуючи лівою кнопкою миші позиції вводу, заповнюють їх. Наприклад:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Вектор може бути заданий рядком або стовпцем.

2 Для обчислення визначника матриці необхідно відкрити піктограму **Vector and Matrix Toolbar / Векторні й матричні операції**, вибрати кнопку $|x|$; у шаблоні, що з'явився, задати ім'я матричної змінної (наприклад, **M1**), вираз **M1** охопити синьою напіврамкою, натиснути знак рівності. Наприклад:

$$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad |M1| = 48$$

3 Для одержання транспонованої матриці необхідно вибрати з палітри кнопку M^T. Усі інші дії аналогічні до п. 2. Наприклад:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix} \qquad M^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 11 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

4 Для пошуку зворотної матриці необхідно задати ім'я матричної змінної і вибрати з палітри кнопку x^{-1}. Результатом буде матриця, обернена до матриці M1.

$$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad M1^{-1} = \begin{pmatrix} -0.938 & 0.062 & 0.375 \\ -0.125 & -0.125 & 0.25 \\ 0.729 & 0.063 & -0.292 \end{pmatrix}$$

5 Для обчислення добутку матриці на **X** (під **X** мається на увазі число, стовпець чи матриця) необхідно після явного задавання матриці набрати знак множення, сам елемент **X** та знак рівності:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 35 & 0 & 45 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

6 Для обчислення суми (різниці) матриць однакового розміру необхідно визначити матрицю, потім набрати знак **+** чи **–** , визначити наступний доданок (від'ємник), набрати знак рівності:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 9 & -4 & 15 \\ 12 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

Замість явного вигляду матриці може використовуватися (задаватися) ім'я матричної змінної:

$$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad M2 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad M1 + M2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 9 & -4 & 15 \\ 12 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

3.1 Матрична форма розв’язання системи лінійних рівнянь

Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases},$$

Потрібно знайти її розв’язання **x1, x2, ... , xn**.

Представимо дану систему рівнянь у матричному вигляді (**A   X = B**), де **A** - матриця коефіцієнтів, **X** - матриця (вектор) змінних, **B** - матриця (вектор) вільних членів:

За умови не виродження матриці **A (det A ≠ 0),** дана система може бути легко вирішена, помноживши ліву і праву частини матричного рівняння **A   X = B** на матрицю, обернену до **A**:

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} \cdot X = B \cdot A^{-1}$$

$$1 \cdot X = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Приклад 5

Знайти розв'язання системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 = 180 \\ 4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + x_3 = 255 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 200 \end{cases}$$

Для цього необхідно виконати такі дії:

1 Задати, використовуючи який-небудь з перерахованих вище способів, матрицю коефіцієнтів **A**. У даному випадку число рядків – (**Rows**) **3** і число стовпців – (**Columns**) **3**). Увести числові значення коефіцієнтів:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2 Аналогічно задати матрицю вільних членів **B**: $\begin{pmatrix} 180 \\ 255 \\ 200 \end{pmatrix}$

3 Обчислити числове значення визначника матриці. Якщо він відмінний від нуля, продовжити розв'язання, в іншому випадку вказати, що система рівнянь не має розв'язків:

$$|A| = -4$$

4 Обчислити матрицю, обернену до матриці A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 2.5 & -2.25 & 0.75 \\ -0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

5 Задати формулу для обчислення матриці змінних множенням оберненої матриці A^{-1} на матрицю вільних членів. Одержати відповідь, обчисливши числові значення матриці змінних:

$$X := A^{-1}\cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 25 \\ 26.25 \\ 23.75 \end{pmatrix}$$

Перевірка:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 180 \\ 255 \\ 200 \end{pmatrix}$$

таким чином, отримали вектор **B**.

Висновок: знайдено вірне розв’язання системи рівнянь.

Питання для самоконтролю

1 Яка із панелей інструментів використовується в MathCad для проведення арифметичних операцій з матрицями?

2 Яка із панелей інструментів використовуються в MathCad для пошуку визначника матриці, матриці оберненої до наданої матриці, транспонування матриці?

3 Як в MathCad здійснити завдання матриці або вектора?

4 Метод пошуку розв’язання системи лінійних рівнянь матричним способом.

4 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

Більшість чисельних методів базується на заміні складніших об’єктів простішими. Найзручнішою для використання на практиці функцією є алгебраїчний багаточлен. Для його задавання потрібно знати тільки скінчену кількість коефіцієнтів. Чисельні значення багаточлена легко знаходяться, його досить просто диференціювати, інтегрувати та ін.

Часто виникає така задача. Відомі значення деякої функції **f** в (**n + 1**) в різних точках $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, ..., $\mathbf{x_n}$, задані у вигляді таблиці (табл. 1).

Таблиця 1

X	x_0	x_1	…	x_n
Y	y_0	y_1	...	y_n

Ці дані можуть бути отримані в результаті експерименту або знайдені попередньо за допомогою достатньо складних обчислень. Потрібно вирішити проблему наближеного відновлення (апроксимації) функції **f** в довільній точці **x** (рис. 8).

Для цього на (**n + 1**) точках будують алгебраїчний багаточлен ступеня **n**:

$$\mathbf{P_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{a_n} \cdot \mathbf{x^n}.$$

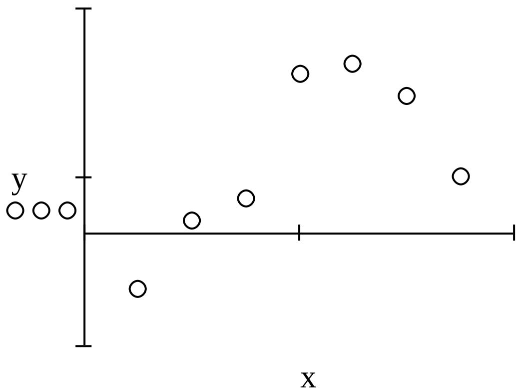


Рисунок 8 – Графік функції, заданої таблицею 1

Він має назву інтерполяційного. Точки $\mathbf{x_i}$ **(i = 0...n)** називають вузлами інтерполяції. Апроксимація функції **f** за формулою $\mathbf{F(x) \approx P_n(x)}$ називається інтерполяцією функції. Використовуючи $\mathbf{P_n(x)}$, можна прогнозувати значення функції **f** в будь-якій точці **x** між заданими точками $\mathbf{x_i}$ **(i = 0...n)**.

Інтерполяція за формулою

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{P_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{a_n} \cdot \mathbf{x^n}$$

при **n = 1** називається лінійною, при **n = 2** – параболічною, при **n = 3** – кубічною (рис. 9а; 9б; 9в відповідно).

У випадку лінійної інтерполяції сусідні точки з’єднуються відрізками прямих, при параболічній та кубічній – параболічним і кубічним сплайнами. Сплайном називають функцію, яка разом з декількома своїми похідними неперервна по всьому заданому відрізку $\mathbf{[x_0;\ x_n]}$, а на кожному частковому відрізку $\mathbf{[x_i;\ x_{i+1}]}$ є деяким алгебраїчним многочленом. Максимальний по всім частковим відрізкам ступінь многочленів має назву ступеню сплайну , а різниця між ступенем сплайну і порядком найбільшої неперервної похідної на відрізку $\mathbf{[x_0;x_n]}$ – дефектом сплайну.

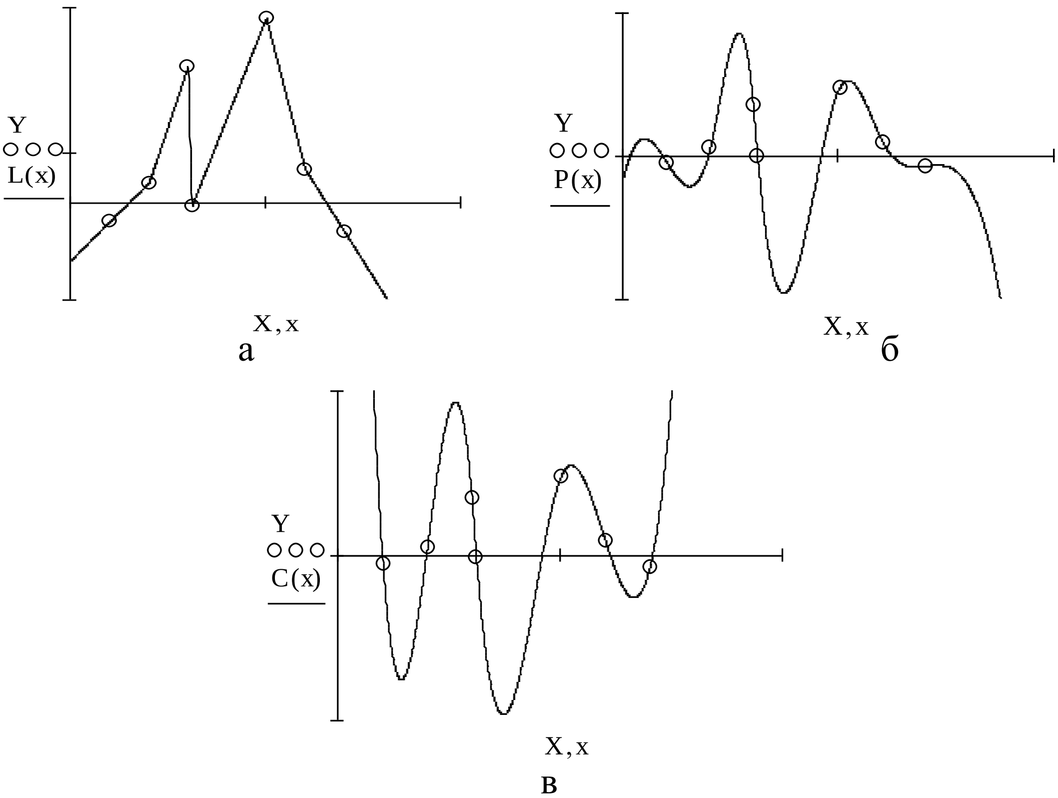


Рисунок 9 – Приклади інтерполяції функцій

Далі розглянемо докладніше випадки лінійної та кубічної інтерполяцій.

4.1 Лінійна інтерполяція

Нехай задані координати точок: **[4; 4], [2; 2], [1; 3], [3; 5]**. Визначимо вектором **VX** абсциси зазначених точок (повинні йти по зростанню), а вектором **VY** – відповідні їм ординати.

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Щоб прогнозувати значення функції, наприклад, у точках **2,5** і **1,2**, досить набрати **Linterp (VX, VY, 2,5) =** , одержимо відповідь**: 3.**

Аналогічно: **Linterp (VX, VY, 1,2) = 2,8**.

Можна також побудувати графік інтерполяційної кривої (у випадку лінійної інтерполяції це ламана лінія) (рис. 10).

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{linterp}(VX, VY, 1.5) = 2.5 \quad \mathrm{linterp}(VX, VY, 2.5) = 3 \quad \mathrm{linterp}(VX, VY, 3.5) = 4.5$$

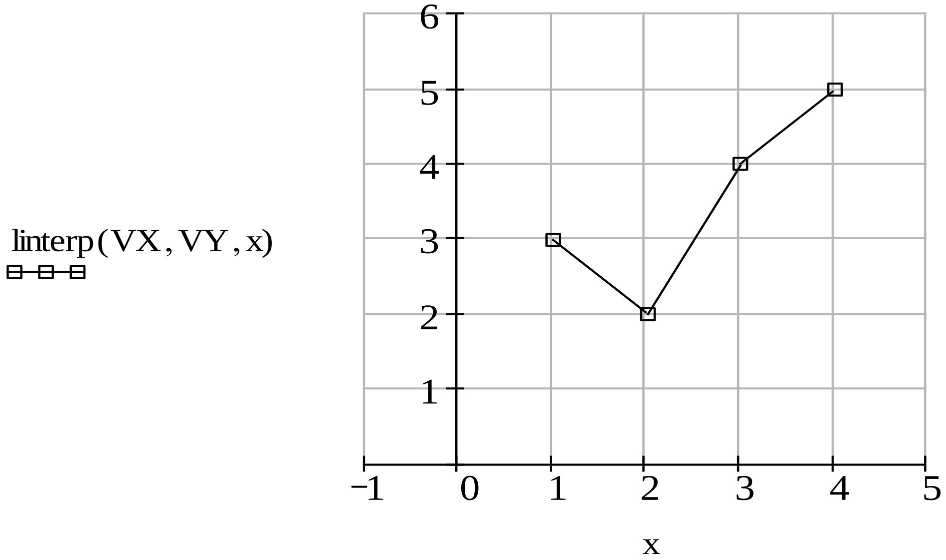


Рисунок 10 – Лінійна інтерполяція

4.2 Кубічна (сплайн) інтерполяція

Кубічна інтерполяція проводить криву через задані точки таким чином, що перші і другі похідні кривої неперервні в кожній точці, що забезпечує гладкість інтерполяційної кривої.

У кубічній інтерполяції використовуються вбудовані функції **cspline** і **interp**. Перша (**cspline**) необхідна для обчислення коефіцієнтів сплайна, що запам'ятовуються у векторі, наприклад: **VS: = cspline (VX, VY)**. Вектор **VS** містить другі похідні інтерполяційної кривої в розглянутих точках. За допомогою другої функції (**interp**) безпосередньо визначається функція, що інтерполює: **f(x): = interp (VS, VX, VY, x)**. Тобто, кубічний сплайн інтерполює значення, представлені у векторах даних **VX** і **VY**.

1 Задамо пари значень **[1; 3], [7; 25] [12; 15] [3; 6] [8; 21]** для інтерполяції у вигляді двох векторів **VX** і **VY** (значення аргументу і значення функції повинні йти в порядку зростання аргументу):

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 25 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2 Задамо вектор коефіцієнтів сплайна: **VS: = cspline (VX, VY)**.

3 Визначимо функцію, що інтерполює: **F(x): = interp (VS, VX, VY, x)**.

4 Для одержання інтерпольованих значень при **x = 2** необхідно набрати: **F(2)** =, після чого буде на екран виведений результат **2,191**.

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 25 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad x := 0, 0.01 .. 13$$

$$VS := \mathrm{cspline}(VX, VY) \qquad F(x) := \mathrm{interp}(VS, VX, VY, x) \qquad F(2) = 2.191$$

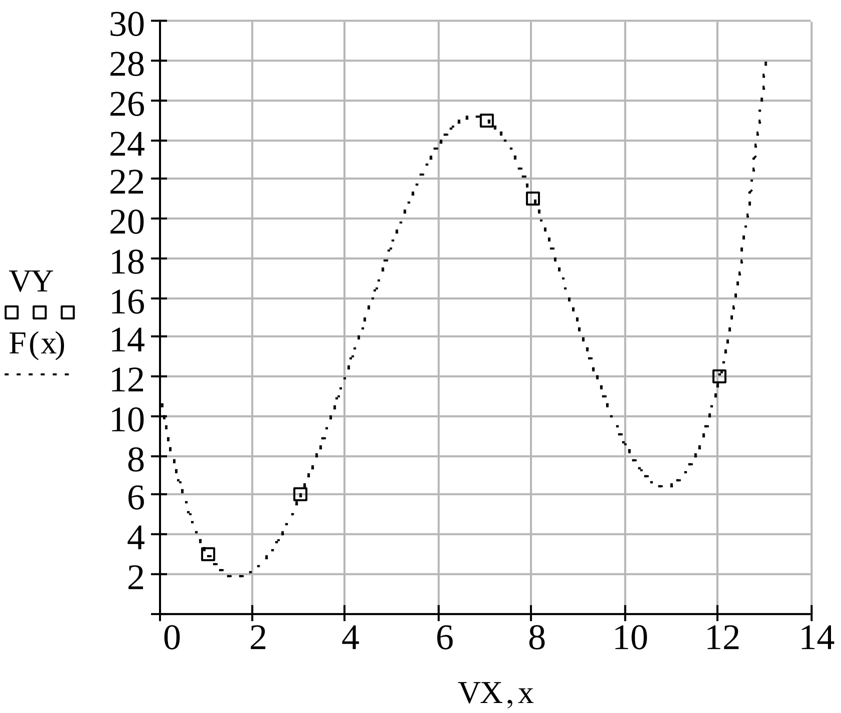


Рисунок 11 – Кубічна інтерполяція даних

Для графічного виводу функції, що інтерполює, необхідно вказати діапазон зміни змінної **x** – від початку до кінця інтервалу, на якому необхідно провести інтерполяцію, а також крок зміни аргументу, достатній для побудови графіка. У нашому випадку (рис. 11) обраний інтервал **[0; 13],** крок **0,01**.

Питання для самоконтролю

1 Яка інтерполяція називається лінійною, параболічною, кубічною?

2 Функція пошуку лінійної інтерполяції в MathCad, її аргументи.

3 Функція пошуку кубічної інтерполяції в MathCad, її аргументи.

4 Функція пошуку коефіцієнтів сплайна в випадку кубічної інтерполяції в MathCad, її аргументи.

5 ОБЧИСЛЕННЯ ОПЕРАТОРІВ

5.1 Оператори обчислення суми і добутку

Оператор підсумовування обчислює суму виразів за всіма значеннями індексу. Оператор добутку працює аналогічним чином – обчислює добуток виразів за всіма значеннями індексу.

Для задавання оператора підсумовування в робочому документі перемістіть курсор на будь-яке вільне місце, потім скористайтеся панеллю інструментів **Calculus Toolbar – Summation / Оператори математичного аналізу - Підсумовування** (кнопка ).

З'являється символ підсумовування з чотирма порожніми полями:

$$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$$

У нижньому полі ліворуч від знака = введіть ім'я змінної. Ця змінна – індекс підсумовування. Вона визначена тільки для оператора підсумовування. Поза оператором може існувати інша змінна з тим же ім'ям. У полі праворуч від знака = введіть будь-яке число, чи будь-який вираз, що набуває цілого значення. У полі над знаком суми введіть ціле число чи будь-який вираз, що набуває цілого значення. У полі, що залишилося, введіть вирази, які потребують підсумовування. Звичайно, цей вираз буде включати індекс підсумовування. Якщо він має кілька членів, використовуйте апостроф **'**, щоб створити пари круглих дужок навколо поля.

Аналогічно створюється оператор добутку. Для цього натисніть клавіші **Ctrl + Shift + 3** (або **Calculus Toolbar - Iterated Product / Оператори математичного аналізу - Добуток**, кнопка $\prod$) і заповніть поля, як описано вище. Нижче наведені деякі приклади використання операторів суми і добутку. Їх можна використовувати як будь-який інший вираз Щоб обчислити кратну суму, потрібно помістити другий оператор суми в поле вираження першого оператора суми.

Приклад 6

$$n := 1..40 \qquad x_n := \sin(0.1 \cdot n \cdot \pi)$$

$$\sum_{n=1}^{20} n = 210 \qquad \sum_{n=1}^{10} x_n = 6.314 \qquad \sum_{n=0}^{40} x_n \cdot n = -126.275$$

$$\prod_{n=0}^{20} (n+1) = 5.109 \times 10^{19} \qquad \sum_{n=0}^{5} \sum_{m=0}^{10} n^m = 1.37 \times 10^{7}$$

При використанні зазначених операторів індекс підсумовування повинен бути цілим і змінюватися з кроком 1. MathCad дозволяє застосовувати узагальнення цих операторів, які можуть використовувати будь-який дискретний аргумент у якості індексу підсумовування. Для застосування цих операторів спочатку необхідно визначити дискретний аргумент.

Наприклад, знайдемо суму для дискретного аргументу **i**, що змінюється в діапазоні від **1** до **3** із кроком **0,5**, тобто суму **= 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3.** Установлюємо курсор на вільному місці, використовуємо **Shift + $** (або **Calculus Toolbar - Range Variable Summation / Оператори математичного аналізу - Підсумовування по дискретному аргументу**, кнопка $\sum_n$).

З'явиться знак підсумовування з полями $\sum_{\blacksquare} \blacksquare$. Як вказувалося, дискретний аргумент, що використовується у цьому операторі, повинен бути визначений заздалегідь. Подальші дії аналогічні описаним вище. Результат обчислення в MathCad показаний нижче.

Приклад 7

$$i := 1, 1.2..3 \qquad k := 0, 2..10$$

$$\sum_{i} i = 22 \qquad \sum_{k} k^2 = 220$$

5.2 Обчислення похідних

Оператор похідної призначений для пошуку чисельного значення похідної функції в заданій точці. Наприклад, щоб знайти похідну функції **y(x) = x³** по **x** у точці **x = 2** , треба виконати наступні дії:

1 Визначте точку, у якій необхідно знайти похідну.
Наберіть **x + Shift + :** потім **2**, одержимо **x : = 2.**

2 Клацніть нижче визначення **x** . Потім виберіть з панелі інструментів **Calculus Toolbar** піктограму .

З'являється оператор похідної з двома полями: $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$

3 Клацніть на полі в знаменнику і наберіть **x**. Це ім'я змінної, по якій виконується диференціювання.

4 Клацніть на полі праворуч від **d / dx** і наберіть **x³**. Це – вираз, який потрібно диференціювати.

5 Натисніть знак =, щоб побачити результат:

$$x := 2$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = 12$$

Наведемо ще кілька прикладів диференціювання за допомогою MathCad.

Приклад 8

Знайти:

1) п’яту похідну функції $\mathbf{x^5}$ в точці **x = 2**,

2) результат множення п’ятої похідної функції $\mathbf{x^5}$ в точці **x = 2** та 10,

3) першу похідну по змінній **y** функції $\mathbf{x^5 \cdot y}$ в точках **x = 2** та **y = 10**.

$x := 2 \qquad\qquad y := 10$

$$\frac{d}{dx}x^5 = 80 \qquad \left(\frac{d}{dx}x^5\right)\cdot 10 = 800 \qquad \frac{d}{dy}x^5\cdot y = 32$$

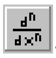
Необхідно пам'ятати, що результат диференціювання в даному випадку є не функція, а число – значення похідної в зазначеній точці змінної диференціювання. Тому похідна від x^3 не є вираження $3\cdot x^2$, а значення вираження $3\cdot x^2$, обчислене в точці x = 2.

5.3 Похідні більш високого (n-го) порядку

У MathCad існує можливість обчислення похідної **n-го** порядку. Наприклад, щоб знайти третю похідну функції **y(x) = x⁹** по **x** у точці **x = 2**, треба виконати наступні дії:

1 Визначте точку, у якій необхідно обчислити похідну. **x:= 2.**

2 Клацніть нижче визначення **x**.

На панелі **Calculus Toolbar** виберіть кнопку . З’явиться оператор похідної з двома полями в знаменнику, одним у чисельнику і ще одним праворуч:

$$\frac{d^{\blacksquare}}{d_{\blacksquare}{}^{\blacksquare}}\blacksquare$$

3 Клацніть на полі внизу і наберіть **x**. Це ім'я змінної, по якій здійснюється диференціювання. Отримаємо:

$$\frac{d^{\blacksquare}}{dx^{\blacksquare}}\blacksquare$$

4 Клацніть на полі вище та праворуч попереднього поля і наберіть **3**. Одержимо:

$$\frac{d^3}{dx^3}\blacksquare$$

Зверніть увагу, що поле в чисельнику автоматично відображає будь-який порядок, набраний у знаменнику.

Клацніть на полі праворуч від **d / dx** і наберіть $\mathbf{x^9}$. Це вираз, який необхідно диференціювати. Натисніть знак =, щоб побачити результат:

$$\frac{d^3}{dx^3}x^9 = 3.226 \cdot 10^4$$

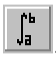
– значення третьої похідної заданої функції в заданій точці.

При **n = 1** цей оператор дає той же результат, що й оператор похідної, описаний вище. При **n = 0** - обертає значення функції.

5.4 Обчислення інтегралів

Оператор інтегрування в MathCad призначений для одержання чисельного значення інтегрування.

Наприклад, визначений інтеграл функції **y = sin(x²)** від **0** до **π / 4** може бути обчислений у такий спосіб:

1 Перемістіть курсор на вільне місце і виберіть на панелі **Calculus Toolbar** кнопку . З'явиться знак інтеграла з порожніми полями для виразу, що інтегрується, меж інтегрування та змінної інтегрування:

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$$

2 Клацніть на полі внизу і наберіть значення лівої межі 0. Клацніть на верхньому полі й значення правої межі **π / 4**. Отримаємо:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \blacksquare \, d\blacksquare$$

3 Клацніть на полі між знаком інтеграла і **d**. Запишіть формулу **sin(x²)**. Це – вираз, який треба інтегрувати.

4 Клацніть на полі після **d** і наберіть **x**. Це – змінна інтегрування.

Потім уведіть знак = для одержання чисельного результату інтегрування.

Результат:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x^2\right)\,dx = 0.157$$

Питання для самоконтролю

1 Яка з панелей інструментів MathCad використовується для обчислювання оператора підсумовування, оператора добутку?

2 Яка з панелей інструментів MathCad використовується для обчислювання похідних, інтегралів?

6 ПОШУК ЕКСТРЕМУМІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

Знайти екстремум функції, використовуючи спеціальні оператори програми MathCad, можна тільки у випадку функцій, що мають кінцеве число екстремумів і не мають нескінченних розривів.

Для функцій, що мають нескінченне число екстремумів (звичайно це функції, до складу яких входять тригонометричні функції), потрібно задати інтервал пошуку екстремуму. Для зручності бажано побудувати графік функції і визначити потрібний діапазон зміни перемінної, на якому функція має екстремум.

Для пошуку максимумів і мінімумів будь-яких алгебраїчних виразів по одній чи декількох змінних використовуються функції вигляду:

P: = Minimize (< **ім'я функції** >,< **список змінних** >),

P: = Maximize (< **ім'я функції** >,< **список змінних** >),

де P - ім'я змінної для обчислення результату.

Ці вирази можна набрати з клавіатури або вибрати за допомогою діалогового вікна операційного меню **Insert - Function - Function Category (Solving) - Function Name (Minimize, Maximize) / Вставка - Функція - Категорія функції (Розв’язання) - Назва функції (Minimize, Maximize)** або аналогічно, використовуючи піктограму **Insert Function** .

Ці функції можуть використовуватися для пошуку екстремальних значень виразів від однієї чи декількох змінних. У якості розв’язання вказані функції повертають значення точок.

Приклад 9

Знайти значення змінних **x** та **y**, при яких функція $\mathbf{f(x,y) = x^2 + y^2 + 3}$ набуває мінімального значення.

Послідовність дій:

1 Задати функцію $\mathbf{f(x,y) := x^2 + y^2 + 3}$.

2 Задати початкові значення змінних для пошуку екстремуму **x: = 1 y: = 1**. Початкові значення вибирають або з фізичних міркувань, або з використанням графіків функції.

3 Задати функцію пошуку мінімуму **P: = Minimize (f, x, y).**

4 Одержимо значення змінних, при яких функція досягає мінімуму:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

де **x = 1** і **y = 0.**

Вид документа в MathCad:

$$f(x,y) := (x-1)^2 + y^2 + 3 \qquad x := 1 \qquad y := 1$$

$$P := \mathrm{minimize}(f, x, y)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приклад 10

Знайти максимальне значення функції $\mathbf{z(x) = |x - 5| - |x| - |7x + 3|}$.

Послідовність дій:

1 Задати функцію $\mathbf{z(x) := |x - 5| - |x| - |7x + 3|}$.

2 Задати початкове наближення аргументу для пошуку розв’язання: **x: = 0.**

3 Записати функцію пошуку максимуму **P: = Maximize (z, x).**

4 Одержати значення змінної **x**, при якому функція досягає мінімуму: **P = -0,429.**

5 Обчислити значення функції в цій точці **z (P) = 5.**

6 Для перевірки знайдемо першу похідну даної функції в точці екстремуму:

$$\frac{d}{dx}z(P) = 0$$

Вид документа в MathCad:

$$z(x) := |x-5| - |x| - |7\cdot x+3|$$

$$x := 0 \qquad P := \mathrm{Maximize}(z, x)$$

$$P = -0.429 \qquad z(P) = 5$$

$$\frac{d}{dx}z(P) = 0$$

Приклад 11

Знайти мінімальне значення функції f **(x, y) = x^2 + y^2** при **x∈[-10, 10]** і **y∈[10, 20]**.

Послідовність дій:

1 Задати функцію **f(x, y): = x^2 + y^2**.

2 Задати початкові наближення аргументу для пошуку розв’язання **x: = 1; y: = 1.**

3 Записати ключове слово для початку блоку розв’язання **Given.**

4 Задати обмеження для змінних:

$$x \geq -10 \; x \leq 10;$$
$$y \geq 10 \; y \leq 20.$$

5 Задати функцію пошуку мінімуму **P: = Minimize (f, x, y).**

6 Одержати значення змінних, при яких функція досягає мінімуму:

$$P = \begin{pmatrix} -2.662 \times 10^{-15} \\ 10 \end{pmatrix}$$

таким чином, **x = 0** і **y = 10**.

7 Обчислити значення функції в цій точці: **f (0; 10) = 100**.

Вид документа в MathCad має вигляд:

$f(x, y) := x^2 + y^2 \qquad x := 1 \quad y := 1$

given

$x \geq -10 \quad x \leq 10 \quad y \geq 10 \quad y \leq 20$

$P := \mathrm{Minimize}(f, x, y)$

$$P = \begin{pmatrix} -2.662 \times 10^{-15} \\ 10 \end{pmatrix}$$

$f(0, 10) = 100$

Треба зазначити, що у прикладі 11 фактично знайдено не екстремум функції, а найменше значення функції у заданій області. Ця область задається у **Solve Block**, що починається з ключового слова **Given**. Вона може включати рівності і нерівності, загальною кількістю до 200. У **Solve Block** можна використовувати знаки відношення **<, ≤, >, ≥, =** і не можна знак **≠**.

Питання для самоконтролю

1 У якому випадку, використовуючи спеціальні оператори MathCad, можливо знайти екстремум функції?

2 Які функції MathCad використовується для пошуку екстремумів, їх аргументи?

3 У яких випадках для пошуку екстремуму функції використовують блок розв’язання (**Solve Block**)?

7 РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ РІВНЯНЬ

7.1 Розв'язання рівнянь

Для пошуку розв'язання одного рівняння з одним невідомим у MathCad використовується функція **root**, виклик якої виконується з використанням піктограми **Insert Function - Function Category (Solving) - Function Name (root) / Вставка функції - Категорія функції (Розв'язання) - Назва функції (root)** або набором із клавіатури. Загальна форма запису: **root(f(x), x)**.

Тут перший елемент – функція **f(x)** (рівняння, розв'язання якого потрібно знайти) визначається або раніше в робочому документі, або задається безпосередньо всередині оператора **root**. Другий елемент **x** – ім'я змінної, що використовується в рівнянні (змінна, варіюючи яку відбувається пошук розв'язання). Цій змінній перед використанням функції **root** необхідно привласнити якесь (у загальному випадку довільне) числове значення. MathCad використовує його як початкове наближення при пошуку кореня рівняння, результатом є найближчий з розв'язків. Тому при використанні функції **root** бажана попередня побудова графіка **f(x)** для визначення початкових наближень.

Розглянемо розв'язання рівняння $\mathbf{e^x = x^3}$.

Виконаємо такі дії:

1 Визначимо вираз, що повинен бути звернений в нуль, тобто перетворимо вихідне рівняння у вигляд $\mathbf{x^3 - e^x = 0}$. Ліва частина цього виразу і є функцією **f(x)** для функції **root**.

2 Побудуємо графік функції $\mathbf{y(x) = x^3 - e^x}$. За його допомогою визначимо початкові наближення для пошуку розв'язків – точки з абсцисами **2** та **5**.

3 Позначимо змінні **X1** і **X2** як корені рівняння, отримані з використанням функції **root**.

4 Одержимо значення коренів рівняння по черзі для кожного з наближень.

5 Перевіримо отримані розв'язання – обидва кореня обертають задане рівняння в нуль. Таким чином, знайдено вірні розв'язання.

Результат представлений на рисунку 12.

При використанні функції **root** варто мати на увазі:

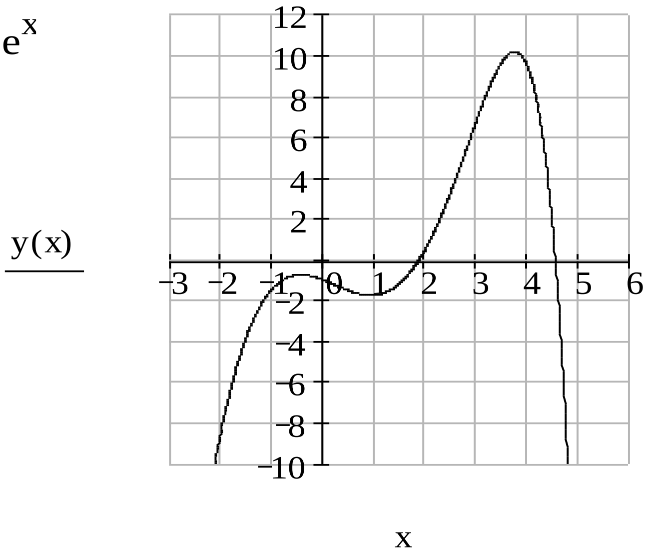
- змінній привласнюється початкове значення (перше наближення) до початку використання функції **root**;

- для виразу з декількома коренями, наприклад $\mathbf{x^2 - 1 = 0}$, початкове наближення і визначає корінь, що буде знайдений;

- функція **root** дозволяє знаходити як дійсні, так і комплексні корені;

- задача розв’язання рівняння виду **f(x) = g(x)** еквівалентна задачі пошуку кореня виразу **f (x) – g (x) = 0** .Для цього функція **root** може бути використана в такий спосіб: **root (f (x) – g (x), x)**.

$$y(x) := x^3 - e^x$$



$x := 2 \quad X1 := \mathrm{root}(y(x), x) \quad X1 = 1.857$

$x := 5 \quad X2 := \mathrm{root}(y(x), x) \quad X2 = 4.536$

$y(X1) = 2.005 \times 10^{-5} \quad y(X2) = -8.439 \times 10^{-5}$

Рисунок 12– Розв’язання рівняння з використанням функції root

7.2 Пошук коренів полінома

Для пошуку коренів полінома

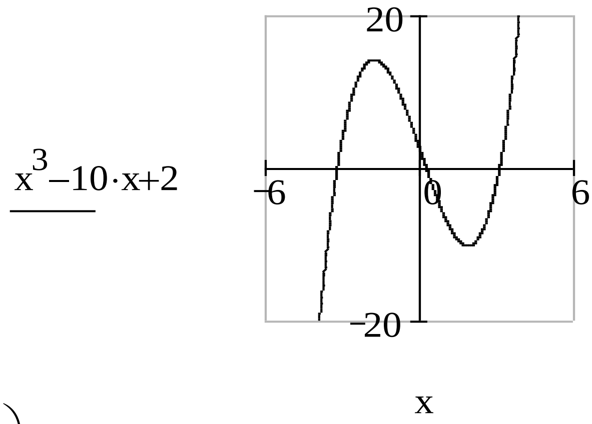
$$\mathbf{P_n(x) = A_nX_n + \cdots + A_2X_2 + A_1X_1 + A_0}$$

ефективніше використовувати функцію **polyroots**, виклик якої здійснюється подібно функції **root**. На відміну від функції **root** функція **polyroots** не вимагає задавання початкових наближень. Крім того, функція **polyroots** обертає в якості розв’язання відразу всі корені, у тому числі і комплексні.

Загальний вигляд функції: **polyroots(v),** де **v** є вектором коефіцієнтів полінома розмірністю **(n+1)**:

$$v := \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

На рисунку 13 приведений приклад використання функції **polyroots** для пошуку коренів полінома $\mathbf{x}^3 - 10 \cdot \mathbf{x} + 2 \cdot \mathbf{x}^0$. Графік та проведена перевірка підтверджують наявність та вірність знайдених трьох коренів.



$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad resh := polyroots(v) \qquad resh = \begin{pmatrix} -3.258 \\ 0.201 \\ 3.057 \end{pmatrix}$$

$$x := resh \qquad x^3 - 10 \cdot x + 2 = \begin{pmatrix} 5.358 \times 10^{-10} \\ 5.358 \times 10^{-10} \\ 5.358 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

Рисунок 13 – пошук коренів полінома з використанням функції ***polyroots***

7.3 Розв’язання системи рівнянь

Для розв’язання систем рівнянь з використанням програми MathCad необхідно виконати такі дії:

1 Задати початкові наближення для всіх невідомих, що входять до системи рівнянь (MathCad використовує для пошуку розв’язків ітераційні методи, тобто на основі початкового наближення будується послідовність, що сходиться до очікуваного розв’язання).

2 Набрати ключове слово **Given**.

3 Ввести рівняння і нерівності в будь-якому порядку нижче ключового слова **Given**. Упевнитися, що між лівими і правими частинами рівнянь є символ = (Булева рівність). Для його набору можна використати сполучення клавіш **Ctrl + =** або піктограму **Boolean Toolbar - Equal to / Панель інструментів булево - Булева рівність** (кнопка =). Між лівими і правими частинами нерівностей може стояти кожен із символів: <, >, ≤ або ≥..

Увести вираз, що включає функцію **Find**. При наборі слова **Find** можна використовувати шрифт будь-якого розміру, довільний стиль, великі і малі літери.

Find (z1, z2, z3, . . .) – обертає розв’язання системи рівнянь; число аргументів повинне дорівнювати кількості невідомих.

Якщо функція **Find** має тільки один аргумент, то вона обертає розв’язання рівняння, розташованого між ключовим словом **Given** і функцією **Find**.

Якщо функція **Find** має більше одного аргументу, то вона обертаєрозв’язання у вигляді вектора. Наприклад, **Find (z1, z2)** повертає вектор, що містить значення **z1** та **z2** і є розв’язанням системи рівнянь.

Ключове слово **Given**, рівняння і нерівності, що записують після нього, та який-небудь вираз, що містить функцію **Find**, називаються блоком розв’язання рівнянь. Між ключовим словом **Given** і функцією **Find** (у блоці розв’язання рівнянь) можуть застосовуватися вирази точно визначеного типу. Нижче приведений список цих виразів. Використання інших виразів не допускається. Дані вирази часто називаються обмеженнями. Через **x** і **y** позначені дійсні скалярні вирази, а через **z** і **w** – будь-які скалярні вирази.

- **w = z** (знак = задається сполученням клавіш **Ctrl + =** – булева рівність) повертає 1, якщо операнди рівні; інакше – 0;
- **x > y** (знак > задається клавішею >) – більше ніж;
- **x < y** (знак < задається клавішею <) - менше ніж;

- **x ≥ y** (знак ≥ задається сполученням клавіш **Ctrl + 0**) – більше або дорівнює;

- **x ≤ y** (знак ≤ задається сполученням клавіш **Ctrl + 9**) – менше або дорівнює.

Такі вирази неприпустимі всередині блоку розв’язання рівнянь:

- обмеження зі знаком ≠ (знак ≠ задається сполученням клавіш **Ctrl + 3)** – не дорівнює;
- дискретний аргумент або дискретне вирази, що містять дискретний аргумент у будь-якій формі;
- нерівності вигляду **a < b < c**.

Функція **Find** може містити два аргументи: **x** і **y** та обертати відповідь у вигляді вектора з двома компонентами.

Що робити, коли Mathcad не може знайти розв’язання?

Якщо в результаті розв’язання системи рівнянь на якому-небудь етапі ітерацій не може бути знайдене більш прийнятне наближення до шуканого розв’язання в порівнянні з попереднім етапом, то пошук розв’язання припиняється, а функція **Find** повідомляє про помилку: **No solution was found / Розв’язання не знайдене**.

Якщо при пошуку зустрічаються труднощі, то корисно вивести, як показано вище, ті чи інші графіки, пов'язані з пошуком. Аналіз графіка може полегшити пошук області, у якій може знаходитися шукане розв’язання, і допоможе вибрати придатне початкове наближення.

Іноді корисно шукане рівняння в області кореня замінити поліномом Тейлора.

Якщо Mathcad все одно не може знайти розв’язання системи рівнянь із заданою точністю, можна замінити функцію **Find** на функцію **Minerr**. Розв’язання, знайдене таким чином, буде мати найменше з усіх можливих значення похибки.

Питання для самоконтролю

1 Яка з функцій MathCad використовується для пошуку розв’язання одного рівняння з одним невідомим, її аргументи?

2 Що таке інтерполяційний поліном, його запис у загальному виді?

3 Яка з функцій MathCad використовується для пошуку коренів полінома, її аргументи?

4 Особливості пошуку розв’язання системи рівнянь з використанням програми MathCad?

8 РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Звичайне диференціальне рівняння – диференціальне рівняння, у якому невідомим є функція однієї змінної.

Результатом розв’язання диференціального рівняння є функція, що у залежності від способу розв’язання може мати вигляд таблиці (як у випадку використання методу Рунге-Кутта) або формули.

Як відомо з курсу диференціальних рівнянь, лише невелика кількість типів рівнянь першого порядку допускають зведення розв’язання до звичайної операції інтегрування. Ще рідше вдається одержати розв’язання в елементарних функціях. Тому велике значення мають чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь, що дозволяють одержати таблицю значень функції в необхідних точках.

У MathCad існує 13 вбудованих функцій для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь різного порядку різними методами. Розглянемо одну з них: **rkfixed** – яка реалізує метод Рунге-Кутта 4-го порядку з фіксованим кроком інтегрування. Цей метод має точність порядку h^5, де h - крок інтегрування.

Загальний вид функції:

Z: = rkfixed (y, x1, x2, npoints, D),

де y - вектор початкових значень шуканих розв’язків;

x1 - значення точки початку відрізка інтегрування;

x2 - значення точки кінця відрізка інтегрування;

npoints - число кроків інтегрування;

D - функція-вектор правих частин рівнянь.

Виклик функції **rkfixed** здійснюється з операційного меню I**nsert - Function -Differential Equation Solving – rkfixed / Вставка - Функція - Розв’язання диференціальних рівнянь - rkfixed** або з використанням піктограми **Insert Function / Вставка функції**().

Розглянемо кілька прикладів запису звичайного диференціального рівняння в пакеті MathCad.

Приклад 12

Дане рівняння й задані граничні умови.

$$y'' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0\ .$$

Запишемо вектор **D**. Число рядків цього вектора дорівнює порядку рівняння, фактично ми записуємо рівняння як систему:

$$\begin{cases} y' = y' \\ y'' = -3y \end{cases}.$$

Позначимо

$$y' = y_1;\ y = y_0\,.$$

Одержимо:

$$D = \begin{bmatrix} y_1 \\ -3 \cdot y_0 \end{bmatrix}.$$

Початкові умови записуються у вигляді:

$$y = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix},$$

значить:

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Приклад 13

Дане рівняння і задані початкові умови:

$$y'' + 3y = x^2 + 3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0\,.$$

У цьому випадку

$$D = \begin{bmatrix} y_1 \\ x^2 + 3 - 3 \cdot y_0 \end{bmatrix},$$

початкові умови записуються так само, як у попередньому прикладі.

Приклад 14

Дане рівняння і задані початкові умови:

$$\mathbf{y}''' + 2 \cdot \mathbf{y}'' + \sin(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}' - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 13,$$

$$\mathbf{y}(0) = 1,\ \mathbf{y}'(0) = 0,\ \mathbf{y}''(0) = -1$$

У цьому випадку $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ 13 - 2 \cdot \mathbf{y}_2 - \sin(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$,

початкові умови: $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Функція **rkfixed** обертає результат у вигляді матриці, яка складається з **p + 1** стовпців і **n** рядків, де **p** – кількість рівнянь системі або порядок рівняння, **n** - кількість кроків інтегрування, і має вигляд:

	0	1	2	...
0	x0	y(x0)	y′(x0)	...
1	x1	y(x1)	**y′(x1)**	...
2	x2	y(x2)	**y′(x2)**	...
...	...	...	...	...

Тут перший стовпець – це значення аргументу, що задається користувачем, другий стовпець – ординати шуканої функції **y(x)**, інші стовпці – значення ординат похідних шуканої функції: **y′(x), y″(x)** і т.д.

Приклад 15

Знайти розв’язання диференціального рівняння **y″ = -y′ + 2 · y** при наступних початкових умовах**: y (0) = 1, y (0) = 3.**

Розв’язання

$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ - вектор початкових умов,

x1 = 0, x2 = 2 - на цьому відрізку шукаємо розв’язання,

npoints = 400 - число кроків інтегрування,

$\mathbf{D(x,y)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ -\mathbf{y_1} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{y_0} \end{bmatrix}$ - вектор правих частин.

Примітка. Нижній індекс у MathCad можна поставити за допомогою натискання клавіші [, або за допомогою панелі інструментів **Vector and Matrix Toolbar – Subscript / Векторні і матричні операції - Нижній індекс** .

Результат описаних дій у середовищі MathCad:

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 + 2 \cdot y_0 \end{pmatrix} \qquad Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 2, 400, D)$$

Одержимо таблицю, у якій перший стовпець – 400 точок інтервалу інтегрування **[0;2]**, другий – значення шуканої функції в цих точках, третій – значення першої похідної. Тому що таблиця дуже довга, на екрані представляється її фрагмент (рис. 14). Цілком переглянути зміст таблиці можна за допомогою лінійок прокручування.

Будуємо графік функції розв’язання, де по осі абсцис відкладають точки нульового стовпця матриці $\mathbf{Z}^{<0>}$ (верхній індекс набирається за допомогою панелі інструментів **Vector and Matrix Toolbar** кнопка), по осі ординат – $\mathbf{Z}^{<1>}$. Це і є графік функції наближеного розв’язання диференціального рівняння (рис. 15).

Питання для самоконтролю

1 Яка з функцій MathCad, що використовуються для пошуку розв’язання диференціальних рівнянь, реалізує метод Рунге-Кутта 4-го порядку з фіксованим кроком інтегрування?

2 Як здійснюється виклик цієї функції, її аргументи?

3 У якому вигляді функція **rkfixed** обертає результат пошуку розв’язання диференціальних рівнянь?

4 Методика завдання вектор-функції правих частин диференціального рівняння?

Z =

	0	1	2
24	0.12	1.355	2.928
25	0.125	1.369	2.927
26	0.13	1.384	2.926
27	0.135	1.399	2.925
28	0.14	1.413	2.925
29	0.145	1.428	2.924
30	0.15	1.443	2.924
31	0.155	1.457	2.924
32	0.16	1.472	2.924
33	0.165	1.486	2.924
34	0.17	1.501	2.925
35	0.175	1.516	2.925
36	0.18	1.53	2.926
37	0.185	1.545	2.926
38	0.19	1.56	2.927
39	0.195	1.574	2.928

Рисунок 14 – Фрагмент таблиці чисельних розв'язків диференціального рівняння

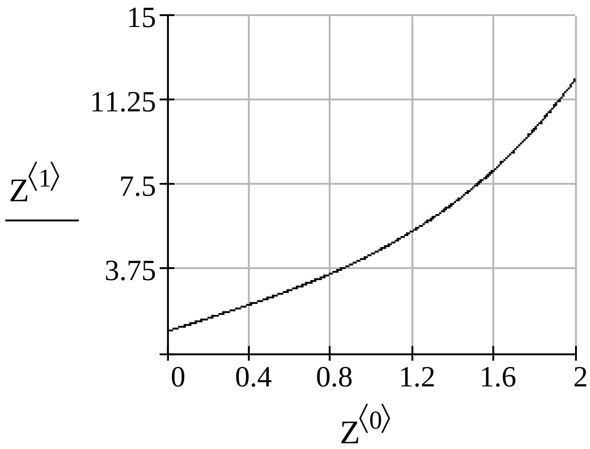


Рисунок 15 – Графік функції наближеного розв'язання диференціального рівняння

9 СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ОДНОМІРНОГО ВИПАДКОВОГО МАСИВУ

Більшість контрольованих параметрів виробів відносяться до нормально розподілених випадкових величин: розміри деталей, вага виливків, процентний вміст хімічних елементів у сплавах, електроємність і опір електротехнічних виробів і т. д.

При справному устаткуванні й правильно відрегульованому технологічному процесі розподіл контрольованого параметру повинний бути нормальним, а його середнє значення повинне збігатися зі значенням, заданим у технічній документації. Можливі відхилення від цієї вимоги й передбачувані причини цих відхилень перераховані в таблиці 2.

Таблиця 2

№	Порушення	Причина
1	Розподіл контрольованого параметра близький до нормального, але вибіркове середнє не збігається зі значенням, заданим технічною документацією	Неправильно відрегульований технологічний процес. Потрібне регулювання
2	Розподіл контрольованого параметра одномодальний, але сильно відрізняється від нормального	Серйозні несправності в устаткуванні. Потрібен ремонт
3	Розподіл багатомодальний	Неякісна вибірка, дані взяті з різних генеральних сукупностей. Повторити вибірку

Щоб встановити, чи має місце одне з перерахованих порушень, роблять статистичний контроль параметра, що нас цікавить. Для цього роблять n випадкових його вимірів: x1, x2, ..., xn (вибірка об'єму n). За вибіркою знаходять наступні числові характеристики:

- математичне очікування: $\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_i x_i$,
- дисперсію: $D^* = \frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}^*\right)^2$,
- середньоквадратичне відхилення: $\sigma^* = \sqrt{D^*}$,
- асиметрію: $Sk = \frac{1}{\left(\sigma^*\right)^3} \cdot \frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}^*\right)^3$,
- ексцес: $Ex = \frac{1}{\left(\sigma^*\right)^4} \cdot \frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \bar{x}^*\right)^4 - 3$.

Одномодальність або багатомодальность вибіркового розподілу визначають з виду гістограми. Близькість закону розподілу до нормального визначають за значеннями асиметрії й ексцесу. Порівняння вибіркового середнього $\bar{x}^*$ зі значенням контрольованого параметра, заданого в технічній документації, дозволяє встановити, чи правильно відрегульований технологічний процес.

Приклад 16

Використовуючи статистичні дані (табл. 3) виконати зазначені нижче завдання.

Таблиця 3

1.67	2.41	0.79	1.41	2.50	2.29	2.58	1.32
3.75	1.94	0.95	3.48	2.39	1.17	1.92	1.04
2.13	1.58	2.18	2.30	3.03	1.50	2.53	1.91
1.31	3.62	1.49	1.98	2.14	3.35	2.89	2.51
2.31	2.34	1.00	2.03	0.64	2.67	0.09	1.78
3.24	1.91	1.20	1.61	2.35	1.73	2.93	2.32
2.84	1.29	2.28	2.54	1.85	2.40	2.22	2.90
2.37	2.68	2.00	2.70	2.33	2.86	0.36	1.98
2.53	0.80	2.89	0.73	1.01	1.85	2.05	1.16
1.76	2.78	2.43	1.85	1.21	1.53	1.54	2.43

1 Створити файл вихідних даних під власним ім'ям (наприклад, fio_2.dat).

2 Для своєї вибірки одержати такі дані: об'єм вибірки n, математичне очікування mean, розмах вибірки R = xmin – xmax, середньоквадратичне відхилення σ, асиметрію Sk, ексцес Ex. За значеннями асиметрії й ексцесу й виду гістограми зробити висновок, чи значно відрізняється розподіл випадкової величини від нормальної.

3 Побудувати гістограму, обравши число часткових інтервалів,що дорівнює 10. Відзначити, чи задовольняє гістограма заданим до неї вимогам. Якщо не задовольняє, зменшити, наскільки це припустимо, число часткових інтервалів.

4 Знайти ймовірність влучення випадкової величини в заданий проміжок: P (2,1 < X < 3,2) = ?.

5 Вважаючи, що технологічний процес відрегульований правильно, а допуск становить 10% від значення контрольованого параметра, знайти випуск придатної продукції у відсотках.

Розв’язання

1 Засобами редактора Блокнот створюємо файл даних dan.dat.

2 Розраховуємо такі значення: об'єм вибірки n, математичне очікування mean, розмах вибірки R = xmin – xmax, средньоквадратичне відхилення σ, асиметрію Sk, ексцес Ex таким чином:

ORIGIN:= 1

i:= 1 .. 80

ξ_i:= READ ("dan.dat")

xmax:= max(ξ)   xmin:= min(ξ) xmax = 3.75xmin = 0.09

ξ:= sort(ξ)   n:= length(ξ)   n = 80   R:= xmax – xmin

mean:= mean(ξ)   mean = 2.03

$disp := var(\xi)\cdot\frac{n}{n-1}$ disp = 0.574

$\sigma := \sqrt{disp}$ $\sigma = 0.758$

$\mu_3 := \left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - mean)^3$ $\mu_4 := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - mean)^4$

$Sk := \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ Sk = –0.173

$Ex := \left(\frac{\mu_4}{\sigma^4}\right) - 3$ Ex = –0.288

За значеннями асиметрії й ексцесу й вигляду гістограми робимо висновок, чи значно відрізняється розподіл випадкової величини від нормального.

3 Будуємо гістограму, задавши число часткових інтервалів таким, що дорівнює 10.

m:= 10 $h := \frac{R}{m}$ h = 0.366

j:= 1 .. m   k:= 1 .. m - 1

$x_j := xmin + \left(\frac{h}{2}\right)\cdot(2\cdot j - 1)$

f := hist(x, ξ)

Висота стовпців дорівнює кількості точок, що потрапили до відповідного часткового інтервалу. Дана гістограма (рис. 16) вимогам, пропонованим до гістограм, не задовольняє.

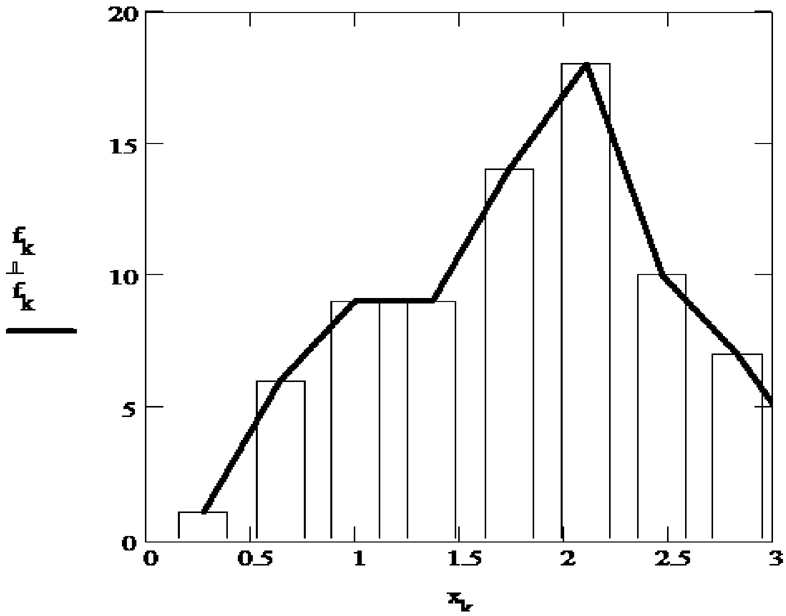


Рисунок 16 – Гістограма для числа часткових інтервалів 10

Зменшуємо число часткових інтервалів до 7 і будуємо нову гістограму (рис. 17).

Дана гістограма відповідає вимогам до гістограм. Число часткових інтервалів зменшувати далі не можна.

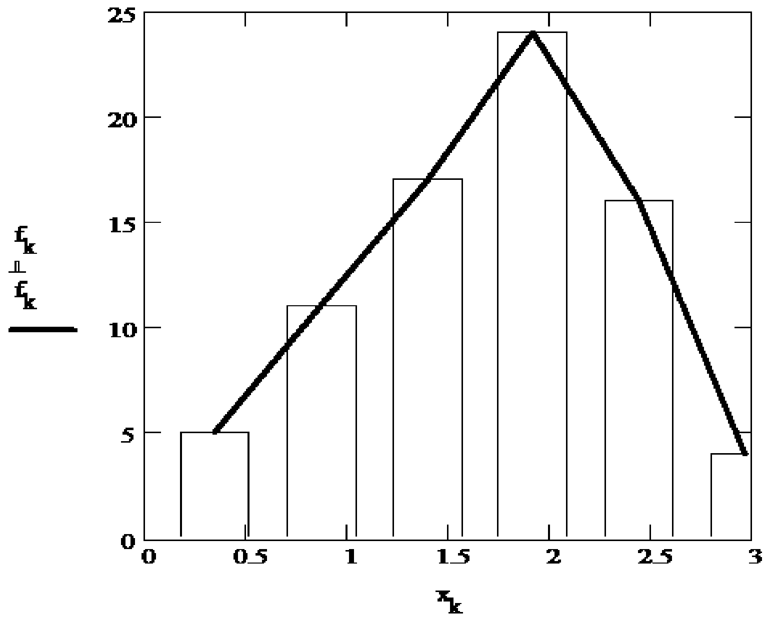


Рисунок 17 – Гістограма для числа часткових інтервалів 7

4 Імовірність влучення випадкової величини в проміжок (a, b) розраховується за формулою:

$$P\ (a < X < b) = F\ (b) - F\ (a),$$

де F (x) – функція розподілу випадкової величини.

Значення функції розподілу знаходимо за допомогою вбудованої функції pnorm (x, mean, σ).

$$\text{pnorm}\ (3.2,\ \text{mean},\ \sigma) - \text{pnorm}\ (2.1,\ \text{mean},\ \sigma) = 0.402;$$
$$P\ (2{,}1 < X < 3{,}2) = F\ (3{,}2) - F\ (2{,}1) = 0{,}402.$$

5 Оскільки технологічний процес відрегульований правильно, вибіркове середнє $\overline{x}$ можна прийняти за значення параметра, заданого в технічній документації. Десятивідсоткове відхилення знаходимо за формулою $\delta = 0{,}1 \cdot \overline{\mathbf{x}} = 0{,}1 \cdot 2{,}03$. Далі обчислюється ймовірність $P\left(\left|x - \overline{x}\right| < \delta\right) = 2F\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$.

$$\delta := 0.1 \cdot \text{mean} \qquad\qquad \delta = 0.203$$

$$2 \cdot \text{pnorm}\left(\frac{\delta}{\sigma}, \text{mean}, \sigma\right) = 0.02$$

Одержуємо відповідь: вихід придатної продукції при заданому допуску $0{,}1\overline{x}$ становить $0{,}02 \cdot 100\% = 2\%$ від усієї продукції.

Питання для самоконтролю

1 Дайте визначення поняттям: об'єм вибірки, математичне очікування, розмах вибірки, середньоквадратичне відхилення, асиметрія, ексцес.

2 Що таке теоретична й емпірична щільність нормального розподілу?

3 Які вимоги до побудування гістограм?

4 Як обчислити ймовірності влучення випадкової величини до заданого проміжку.

5 Як обчислити ймовірність відхилення випадкової величини від математичного очікування не більше, ніж на задану величину.

10 ПРОГНОЗ НА ПІДСТАВІ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ. ТОЧНІСТЬ ПРОГНОЗУ. ТІСНОТА ЛІНІЙНОГО ЗВ'ЯЗКУ

Рівняння лінійної регресії $y = b_0+b_1x$ знаходять за вибіркою методом найменших квадратів. На рис. 19 це похила пряма, зображена суцільною лінією. Точна лінійна залежність між x и y: $y = \beta_0+\beta_1x + \varepsilon$ (ε - випадковий член) невідома. Можна тільки затверджувати, що вона з імовірністю γ розташована в довірчій області, обмеженої лініями гіперболи.

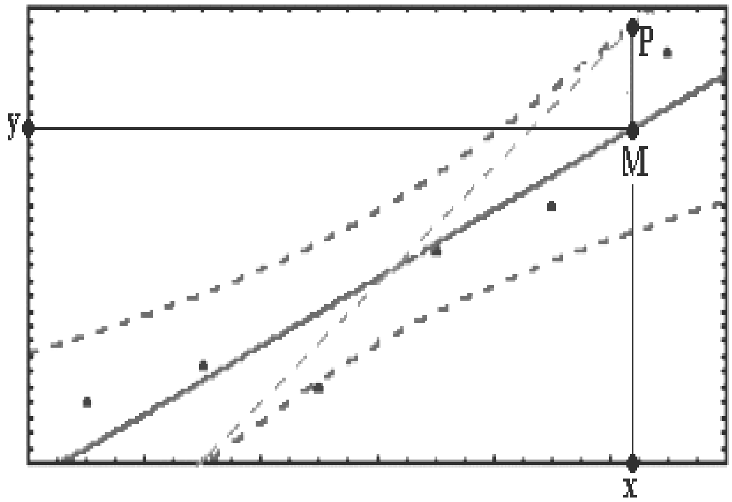


Рисунок 18 – Довірча область

Імовірність γ називається рівнем довіри. Зазвичай беруть $\gamma = 0{,}95$ або $\gamma = 0{,}99$ (95%, 99%). Точна лінія регресії $y = \beta_0 + \beta_1x + \varepsilon$ зображена на рис. 18 пунктирної прямої. Прогноз в у точці x роблять по рівнянню $y = b_0+b_1x$. Точне значення прогнозу може з імовірністю γ відповідати будь-якій точці довірчого інтервалу PQ (рис.19).

У найбільш несприятливому випадку точний прогноз потрапляє на край довірчої області. У цьому випадку абсолютна похибка прогнозу дорівнює напівширині довірчого інтервалу δ = MP = MQ. Відносна похибка прогнозу у відсотках обчислюється за формулою:

$$Отт\,погр. = \left|\frac{\delta}{y_{прогноза}}\right| \cdot 100\%.$$

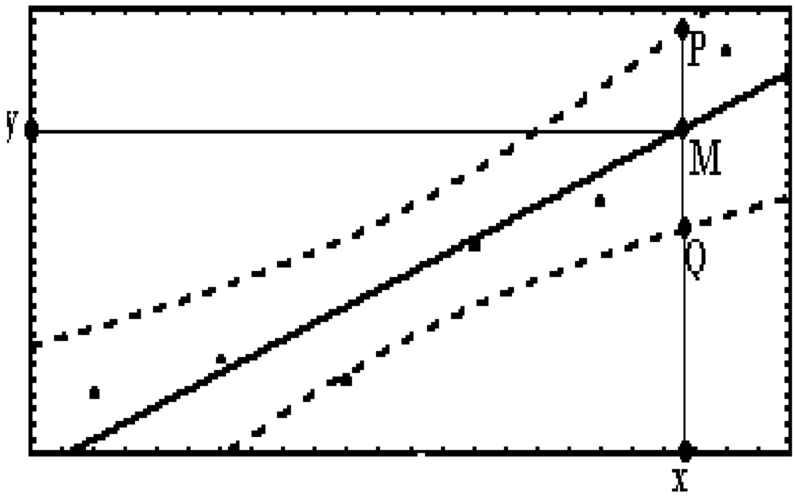


Рисунок 19 – Знаходження на півширини довірчого інтервалу

Приклад 17

Використовуючи статистичні дані (табл. 4) виконати зазначені нижче завдання.

Таблиця 4

№	X	Y
1	7,89	8,9
2	14,41	4,3
3	6,01	10,2
4	9,17	4,9
5	6,78	8,3
6	8,91	7,8
7	6,17	13,1
8	10,11	4,9
9	5,98	13,3
10	6,10	10,7
11	5,90	13,7
12	8,13	5,6
13	9,01	4,7
14	6,00	11,1
15	6,13	10,8

1 Знайти коефіцієнт кореляції й оцінити за ним тісноту лінійного зв'язку.

2 Побудувати графіки лінії регресії з 80%, 95% і 99% довірчими областями.

3 Нанести вручну на лінію регресії центр розсіювання.

4 Знайти за графіком прогноз у точці, що відповідає центру розсіювання для всіх трьох значень рівня довіри (80%, 95%, 99%), а також прогноз у будь-якій довільній точці з області прогнозів.

5 Знайти за графіком напівширину довірчого інтервалу δ_γ у точці, що відповідає центру розсіювання для всіх трьох значень рівня довіри (80%, 95%, 99%): δ_{80}, δ_{95}, δ_{99}.

6 Оцінити максимальну відносну помилку прогнозу (у відсотках) для всіх трьох значень рівня довіри (80%, 95%, 99%) за формулою $\left|\frac{\delta_\gamma}{y_{прогноза}}\right| \cdot 100\%$ (δ_γ ($y_{прогнозу}$ знаходимо за кресленням).

7 Зробити висновок про взаємозв'язок рівня довіри γ і відносної похибки прогнозу.

Розв’язання

1 Засобами редактора Блокнот створюємо файли даних dan_x.dat і dan_y.dat.

2 До MathCad завантажуємо ці дані. Вони будуть представлені у такому вигляді:

ORIGIN := 1 N := 15 i := 1 .. N

x_i := READ("dan_x.dat")

$x^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7.89	14.41	6.01	9.17	6.78	8.91	6.17	10.11	5.98	6.1

y_i := READ("dan_y.dat")

$y^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8.9	4.3	10.2	4.9	8.3	7.8	13.1	4.9	13.3	10.7

Будуємо кореляційне поле (рис. 20).

З вигляду кореляційного поля можна припустити, що залежність між x і y існує. Для визначення тісноти лінійного зв'язку знаходимо коефіцієнт кореляції: $\mathrm{corr}(x, y) = -0.808$

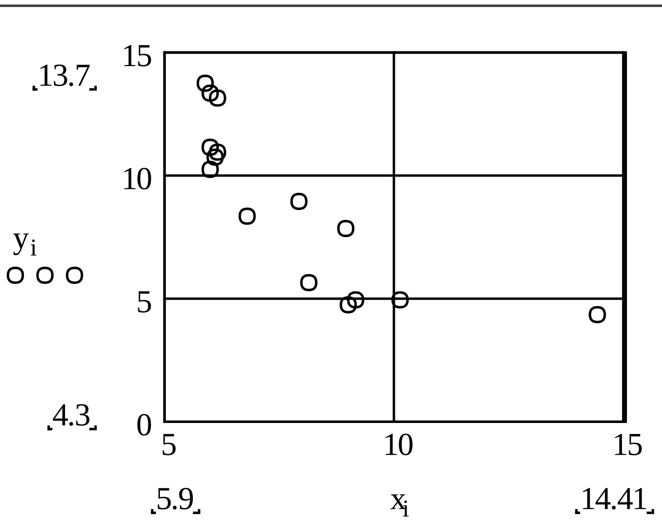


Рисунок 20 – Кореляційне поле

Коефіцієнт кореляції для змінних X і Y дорівнює -0,808. Оскільки 0,6<|-0,808|<0,9, робимо висновок, що лінійний зв'язок між цими змінними достатній.

За методом найменших квадратів знаходимо коефіцієнти моделі $y = b_0 + b_1x$:

$$b0 := \mathrm{intercept}(x, y) \qquad b0 = 17.818$$

$$b1 := \mathrm{slope}(x, y) \qquad b1 = -1.157$$

$$yr_i := b0 + b1 \cdot x_i$$

Знаходимо координати центра розсіювання й область прогнозів.

Середнє значення фактора X:

$$Xmean := \mathrm{mean}(x) \qquad Xmean = 7.78$$

Середнє значення фактора Y:

$$Ymean := \mathrm{mean}(y) \qquad Ymean = 8.82$$

Середні значення (Mean) дають координати центра розсіювання $(\bar{x}, \bar{y}) = (7.78, 8.82)$.

Розраховуємо значення дисперсії:

$$S2 := \left(\frac{1}{N-1}\right)\cdot\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - yr_k\right)^2 \qquad S2 = 3.88$$

Область прогнозів задається у вигляді Xmin ≤ X ≤ Xmax, де мініма-льне й максимальне значення знаходимо в такий спосіб:

$$Xmin := \min(x) \qquad Xmin = 5.9 \qquad Xmax := \max(x) \qquad Xmax = 14.41$$

Область прогнозів задається інтервалом (Xmin; Xmax), у даному прикладі (5,9; 14,41).

Будуємо графіки лінійної регресії з 80%, 95%і 99% довірчими областями.

Одержимо три графіки. Результат виконання завдання в MathCad представлений нижче.

Рівень довіри γ = 80% (рис. 21)

$$\alpha := 0.20 \qquad t := qt\left[1-\left(\frac{\alpha}{2}\right), N-2\right]$$

$$\delta_i := t\cdot\sqrt{S2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)+\frac{\left(x_i - Xmean\right)^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - Xmean\right)^2}}}$$

$$yleft_i := yr_i - \delta_i \qquad yright_i := yr_i + \delta_i$$

Рівень довіри γ = 95% (рис. 22).

$$\alpha := 0.05 \qquad t := qt\left[1-\left(\frac{\alpha}{2}\right), N-2\right]$$

$$\delta_i := t\cdot\sqrt{S2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)+\frac{\left(x_i - Xmean\right)^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - Xmean\right)^2}}}$$

$$yleft_i := yr_i - \delta_i \qquad yright_i := yr_i + \delta_i$$

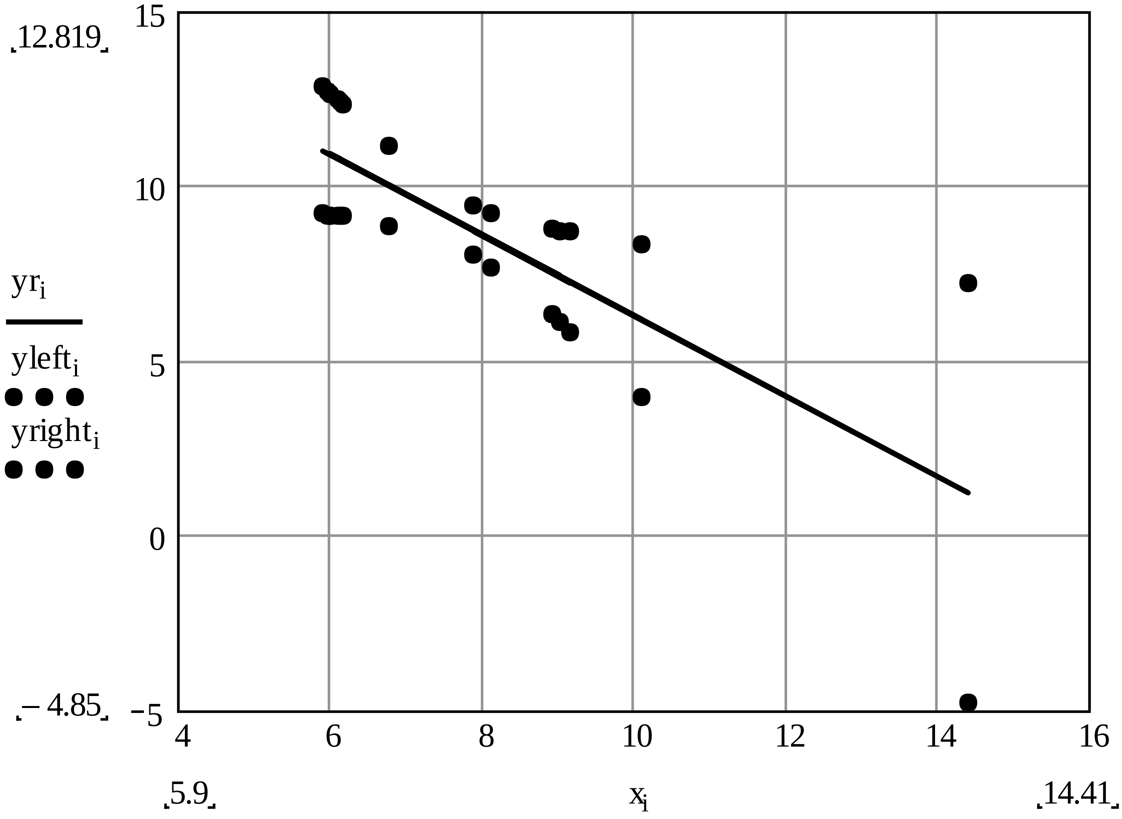


Рисунок 21

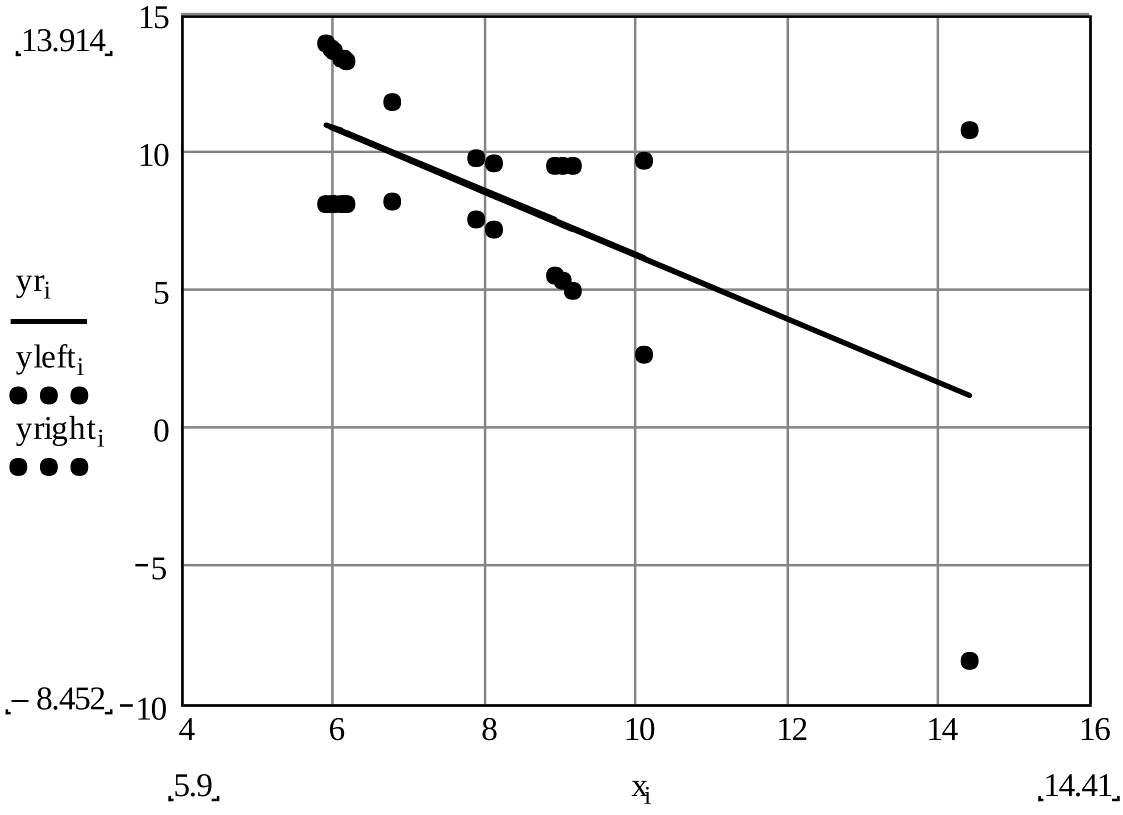


Рисунок 22

Рівень довіри $\gamma = 99\%$ (рис. 23).

$$\alpha := 0.01 \qquad t := qt\left[1-\left(\frac{\alpha}{2}\right), N-2\right]$$

$$\delta_i := t\cdot\sqrt{S2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)+\frac{\left(x_i - Xmean\right)^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - Xmean\right)^2}}}$$

$$yleft_i := yr_i - \delta_i \qquad yright_i := yr_i + \delta_i$$

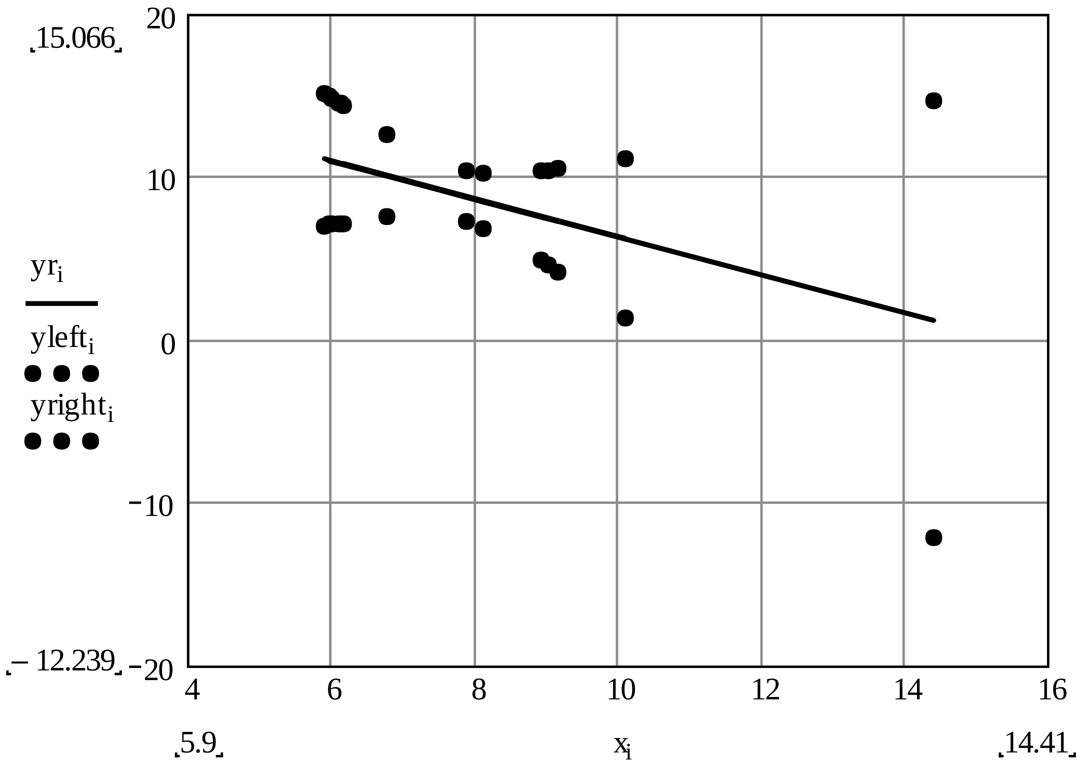


Рисунок 23

Пункти завдання 3-6 виконуються вручну.

Питання для самоконтролю

1 Дайте визначення поняттям: кореляційне поле, область прогнозів, прогноз, довірча область, довірчий інтервал, рівень довіри, напівширина довірчого інтервалу, абсолютна й відносна погрішності прогнозу, коефіцієнт кореляції, тіснота лінійного зв'язку.

2 Як знайти графік й рівняння лінійної регресії й довірчої області при заданому рівні довіри γ ?

3 Як знайти за графіком прогноз відгуку у при заданому значенні фактора х?

4 Як знайти за графіком максимальну абсолютну похибку прогнозу?

5 Як зробити розрахунок максимальної відносної похибки прогнозу у відсотках?

6 Як оцінити тісноту лінійного зв'язку за значенням коефіцієнта кореляції?

Додаток А

Приклади розв’язання завдань

Приклад 1

Для функції $\mathbf{f(x) = 3 + \sin(4 + x^2)}$ за допомогою пакета MathCad побудувати графік. Інтервал зміни змінної **x** підібрати таким чином, щоб на цьому інтервалі функція мала тільки два екстремуму (один максимум й один мінімум). Обчислити координати чотирьох точок, що лежать на графіку функції: координати початку і кінця інтервалу побудови графіка, а також приблизні координати точок екстремуму.

Виконання завдання

1 Визначаємо досліджувану функцію: $\mathbf{f(x) := 3 + \sin(4 + x^2)}$.

2 Для побудови графіка функції:

2.1 Указати попередній діапазон зміни змінної x (-5;5) із кроком зміни аргументу 0,1 (див. Табулювання функції). На панелі інструментів **Graph / Графіки** вибрати **X-Y Plot / Декартов графік** .

2.2 В отриманому шаблоні під віссю абсцис задати ім'я аргументу функції - x, поруч з віссю ординат записуємо ім'я досліджуваної функції (з обов'язковою вказівкою аргументу) – **y(x)**. Підібрати масштаб по осі абсцис, клацнувши по ній двічі мишкою, у діалоговому вікні, що з'явилося, зняти прапорець **Auto Grig** і в полі **Number of Grids** ввести число в діапазоні від **2** до **99** (у нашому випадку оптимальним виявилося число **10**).

2.3 За графіком, що отримали, вибрати оптимальний діапазон зміни аргументу (що містить дві точки екстремуму): координата початку інтервалу побудови графіка **0,6**, а його кінця **2,4**. За графіком функції знайти наближені координати абсцис точки мінімуму **0,8** і максимуму **2,0.**

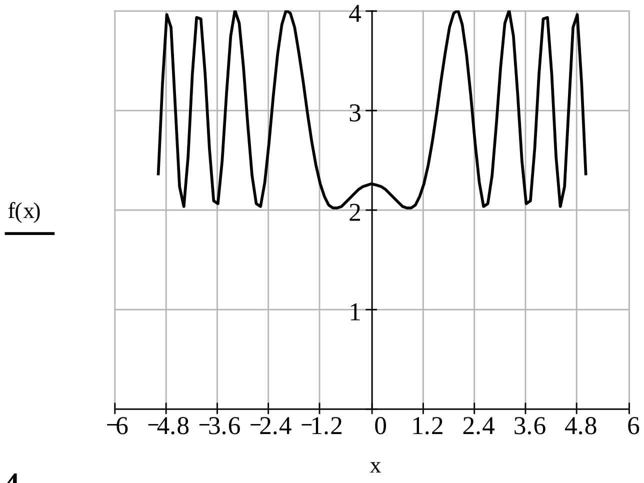
2.4 Ординати точок екстремуму функції на обраному відрізку знаходимо в такий спосіб: перемістивши курсор на вільне місце листа (нижче або праворуч) вводимо: **f(0,6) =** , повторюючи дії у випадку **f(0,8)**, **f(2)**, **f(2,4)** обчислюємо значення функції в заданих точках.

2.5 Таким чином, координати точок мінімуму і максимуму функції на обраному інтервалі **[0,6; 2,4]**, відповідно, **[0,8; 2,003]** і **[2,0; 3,989]**, початку і кінця інтервалу **[0,6; 2,061]** і **[2,4; 2,671]**.

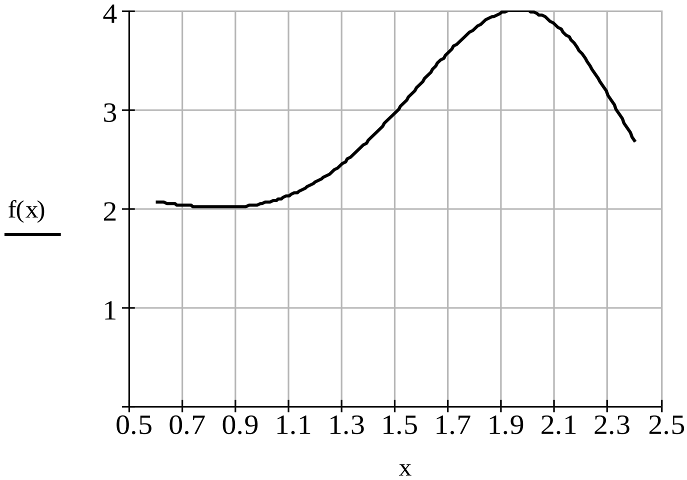
Результат виконання завдання в MathCad представлений на рисунку А.1.

$f(x) := 3 + \sin\left(4 + x^2\right)$

$x := -5, -4.9 .. 5$



$x := 0.6, 0.61 .. 2.4$



$f(0.6) = 2.061$

$f(0.8) = 2.003$

$f(2) = 3.989$

$f(2.4) = 2.671$

Рисунок А.1 – Результат виконання прикладу 1

Приклад 2

У випадку функції з прикладу 1 виконати:

1 Для точок **[x1; y1], [x2; y2], [x3; y3], [x4; y4],** знайдених у прикладі 1, побудувати лінійну інтерполяцію. Побудувати на одному рисунку графік функції та інтерполяційний графік. У точках максимальної розбіжності графіків знайти відносну похибку за формулою:

$$\text{Відн. пох.} = \frac{\left| y_{точн} - y_{приб} \right|}{y_{точн}} \cdot 100 \, .$$

2 Для точок **[x1; y1], [x2; y2], [x3; y3)] [x4; y4]**, знайдених у прикладі А.1, побудувати кубічну інтерполяцію. Побудувати на одному рисунку графік функції та інтерполяційний графік. У точках максимальної розбіжності графіків знайти відносну похибку.

3 Відзначити достоїнства і недоліки кожного з методів апроксимації.

Виконання завдання

Точки, знайдені в прикладі 1: **[0,6; 2,061], [0,8; 2,003], [2,0; 3,989], [2,4; 2,671].**

1 Задаємо функцію **f (x) = 3 + sin (4 + x2)** і діапазон зміни аргументу **[0,6; 2,4]** із кроком **0,001**.

1.1 Для побудови лінійної інтерполяції для заданих точок:

1.1.2 Задаємо вектор даних: **Х**.

1.1.3 Задаємо вектор даних: **У**.

1.1.4 Задаємо функцію розв’язання, записавши **F(x): = linterp (X, Y, x)**.

1.1.5 Будуємо графік у декартовій системі координат. Біля осі ординат перелічуємо імена функцій (з обов'язковою вказівкою аргументу), графіки яких потрібно побудувати. Біля осі абсцис вказуємо імена аргументів.

1.1 Для обчислення відносної похибки лінійної інтерполяції:

1.1.1 За графіком приблизно знаходимо, що точка максимальної розбіжності графіків функції і лінійної інтерполяції має координату по осі абсцис **1,2**.

Для обчислення відносної похибки задамо формулу:

$$\mathrm{Ot\_Pogresh} := \left|f(1.2) - F(1.2)\right| \cdot \frac{100}{f(1.2)}$$

1.2.3 Для обчислення значення відносної похибки вводимо **Ot_Pogresh =**. Вона складає **18,274%.**

Результат виконання завдання представлений на рисунку А.2.

2 Для побудови кубічної інтерполяції:

2.1 Задаємо вектори даних **Х** и **У**.

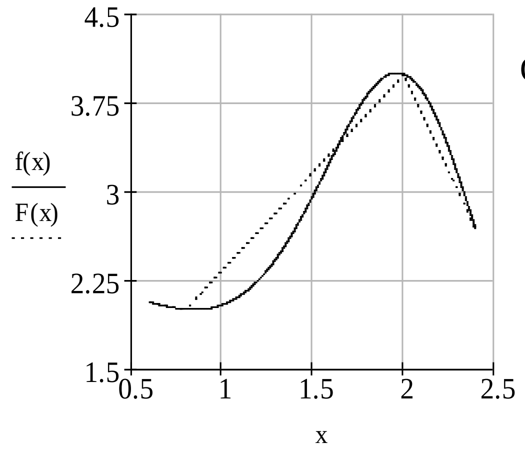
2.2 Задаємо формулу для обчислення коефіцієнтів кубічного сплайна, задавши **vs: = cspline (X, Y)** і функцію розв’язання **F(x): = interp (vs, X, Y, x)**.

2.3 Будуємо графік в декартовій системі координат. Біля осі ординат перелічуємо імена функцій (з обов'язковою вказівкою аргументу), графіки яких потрібно побудувати. Біля осі абсцис вказуємо імена аргументів.

2.4 Приблизно за графіком знаходимо, що точка максимальної розбіжності графіків функції і кубічної інтерполяції має координату по осі абсцис 1,5.

$$f(x) := 3 + \sin\left(4 + x^2\right) \qquad x := 0.6, 0.601 .. 2.4$$

$$X := \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 2.061 \\ 2.003 \\ 3.989 \\ 2.671 \end{pmatrix} \qquad F(x) := \mathrm{linterp}(X, Y, x)$$



$$Ot\_Pogresh := \left|f(1.2) - F(1.2)\right| \cdot \frac{100}{f(1.2)}$$

$$Ot\_Pogresh = 18.274$$

Рисунок А.2 – Лінійна інтерполяція

2.5 Відносну похибку обчислюємо за формулою:

$$Ot\_Pogresh := \left|f(1.5) - F(1.5)\right| \cdot \frac{100}{f(1.5)}$$

Результат обчислення відносної похибки **16,616%.**

Розв’язання завдання в MathCad наведено на рисунку А.3.

3 *Висновок*. Суть будь-якого методу інтерполяції полягає в розбивці відрізка, на якому досліджується функція, на **n** відрізків. На кожній з отриманих ділянок обчислюються значення функції і будується крива, що з'єднує кінці відрізків. У випадку лінійної інтерполяції такою кривою є пряма, а у випадку кубічної – парабола.

Лінійна інтерполяція дозволяє побудувати "грубу" інтерполяцію, а кубічна – більш точну, тому що кубічна інтерполяція не тільки містить у собі формулу лінійної інтерполяції $\mathbf{P(x) = y + q \cdot \Delta y_0}$, але до неї додається й уточнення:

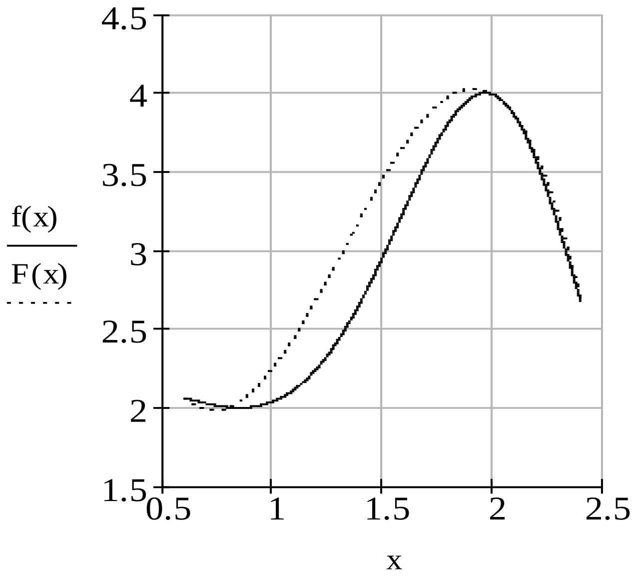
$$P(x) = y + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q \cdot (q-1)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{6} \cdot \Delta^3 y_0 .$$

$$f(x) := 3 + \sin\left(4 + x^2\right) \qquad x := 0.6, 0.601 .. 2.4$$

$$X := \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 2.061 \\ 2.003 \\ 3.989 \\ 2.671 \end{pmatrix}$$

$$vs := cspline(X, Y)$$

$$F(x) := interp(vs, X, Y, x)$$



$$Ot\_Pogresh := \left| f(1.5) - F(1.5) \right| \cdot \frac{100}{f(1.5)} \qquad Ot\_Pogresh = 16.616$$

Рисунок А.3 – Кубічна інтерполяція

При виконанні завдання були побудовані "грубі" інтерполяції, тому що взяті усього чотири вузли, що не забезпечує високого ступеню точності. Взагалі число інтерполяцій не обмежене, і його потрібно вибирати так, щоб кінцева різниця $\Delta^N \cdot y_0$ була постійною з заданою точністю. У розглянутому прикладі похибки, отримані і для лінійної інтерполяції **[18,274%]** і для кубічної **[16,616%]**, досить високі. Хоча у випадку кубічної інтерполяції, як і очікувалося, відносна похибка нижча.

Приклад 3

1 Для функції **f (x)** із завдання 1 і її лінійної інтерполяції (приклад А.2) знайти похідну функції і похідну інтерполяції. На одному малюнку побудувати їхні графіки. У точці максимальної розбіжності графіків обчислити відносну похибку.

2 Для функції **f (x)** із прикладу А.1 і її кубічної інтерполяції (приклад А.2) знайти похідну функції і похідну інтерполяції. На одному малюнку побудувати їхні графіки. У точці максимальної розбіжності графіків обчислити відносну похибку.

3 Знайти визначені інтеграли на проміжку [x1, x4] заданої функції, її лінійної і кубічної інтерполяцій. Знайти відносну похибку, обумовлену заміною заданої функції на кожен вид наближеної.

4 Звести в одну таблицю всі знайдені похибки прикладу А.1, похідної й інтеграла.

5 На підставі таблиці зробити висновок про припустимість застосування апроксимації при інтегруванні і диференціюванні.

1 Послідовність дій для виконання пункту 1 прикладу:

1.1 Задаємо функцію:

$$f(x) := 3 + \sin\left(4 + x^2\right).$$

1.2 Задаємо оператор похідної.

1.2.1 Заповнюємо шаблон, що з'явився:

$$\frac{d}{dx}\left(3 + \sin\left(4 + x^2\right)\right)$$

1.3 Одержуємо аналітичну формулу похідної. Для цього:

1.3.1 У шаблоні з п. 1.2.1 добиваємося появи синьої напіврамки, що повністю охоплює створений запис праворуч. У меню **Symbolics / Символи** вибираємо пункт **Simplify / Спростити**. У результаті нижче (або праворуч, в залежності від умовчань MathCad) оператора похідної з'явиться формула похідної.

1.3.2 Одержана формула похідної є символьним результатом обчислення (набором символів), тому, щоб перетворити її у функцію, привласнюємо функції **df (x)** значення отриманого символьного вигляду похідної:

$$df(x) := 2 \cdot \cos\left(4 + x^2\right) \cdot x.$$

1.4 Щоб задати похідну функції лінійної інтерполяції **d(x):**

1.4.1 Задаємо вектори вихідних даних і, попередньо підрахувавши значення похідної функції в точках інтерполяції

$$df(0.6) = -0.414 \qquad df(2) = -0.582$$
$$df(0.8) = -0.116 \qquad df(2.4) = -4.533$$

1.4.2 Позначимо функцію похідної інтерполяції, задавши **d(x): = linterp (X, Y, x)**.

1.4.3 Будуємо графік похідної функції і графік її лінійної інтерполяції. За графіком знаходимо, що точка максимальної розбіжності має приблизну координату по осі абсцис **1,6**.

1.4.5 Задаємо формулу для обчислення відносної похибки:

$$Ot\_Pogresh := \left|df(1.6) - dF(1.6)\right| \cdot \frac{100}{f(1.6)}$$

Результат обчислення складає **107,074%.**

Результат виконання завдання в MathCad представлений на рисунку А.4.

2 Послідовність дій для виконання пункту 2 завдання:

2.1 Виконуємо дії, описані в пунктах 1.1 - 1.3, 1.4.1 прикладу 3.

2.2 Одержуємо коефіцієнт кубічного сплайну **vs: = csplinc (X, Y)**.

2.3 Задаємо формулу кубічної інтерполяції **dF (x): = interp (vs, X, Y, x)**.

2.4 За графіком знаходимо, що точка максимальної розбіжності має приблизну координату по осі абсцис **1,6**.

Відносна похибка у випадку застосування кубічної інтерполяції склала **69,034 %.**

Результат виконання завдання в MathCad наведений на рисунку А.5.

3 Послідовність дій при виконанні пункту 3 завдання:

3.1 Записуємо функцію **f (x): = 3 + sin (4 + x2)**.

3.2 Задаємо вектори вихідних даних **X:=** і **Y: =** .

3.3 Записуємо функцію лінійної інтерполяції **Fl (x):= linterp (X,Y,x)**, коефіцієнта кубічного сплайну **vs: = cspline (X, Y)** і кубічної інтерполяції **Fk (x): = interp (vs, X, Y, x)**.

3.4 Обчислюємо визначений інтеграл **f (x)**, для цього:

$$f(x) := 3 + \sin\left(4 + x^2\right) \qquad \frac{d}{dx}\left(3 + \sin\left(4 + x^2\right)\right) \quad 2\cdot\cos\left(4 + x^2\right)\cdot x$$

$$df(x) := 2\cdot\cos\left(4 + x^2\right)\cdot x$$

$$X := \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} df(0.6) = -0.414 \\ df(0.8) = -0.116 \\ df(2) = -0.582 \\ df(2.4) = -4.533 \end{matrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} -0.414 \\ -0.116 \\ -0.582 \\ -4.533 \end{pmatrix}$$

$$dF(x) := \mathrm{linterp}(X, Y, x)$$

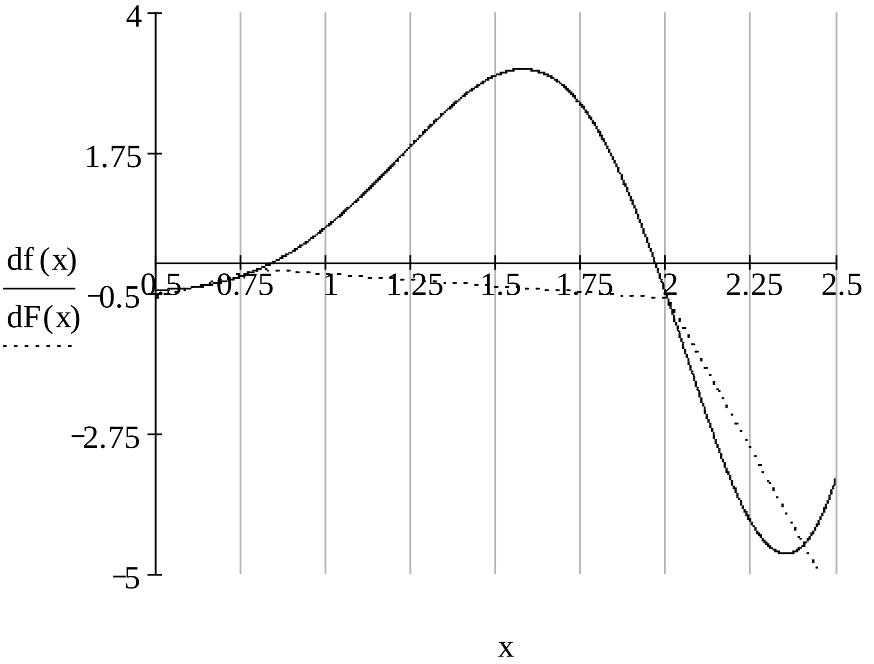
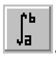


Рисунок А.4 – Диференціювання функції

3.4.1 На панелі інструментів **Calculus Toolbar / Оператори математичного аналізу** вибираємо **Definite Integral / Визначений інтеграл** кнопка .

3.4.2 Заповнюємо шаблон визначеного інтеграла і натискаємо клавішу **=**. Результат інтегрування **5,418**.

3.5 Аналогічно обчислюємо визначені інтеграли для функцій **Fl (x)** і **Fk(x)**. Визначені інтеграли дорівнюють **5,541** і **5,786,** відповідно.

3.6 Задаємо формули для знаходження відносних погрішностей і обчислюємо їх.

Результат виконання завдання в MathCad наведений на рисунку А.6.

$$f(x) := 3 + \sin\left(4 + x^2\right) \qquad \frac{d}{dx}\left(3 + \sin\left(4 + x^2\right)\right) \qquad 2\cdot\cos\left(4 + x^2\right)\cdot x$$

$$df(x) := 2\cdot\cos\left(4 + x^2\right)\cdot x$$

$$X := \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} df(0.6) &= -0.414 \\ df(0.8) &= -0.116 \\ df(2) &= -0.582 \\ df(2.4) &= -4.533 \end{aligned} \qquad Y := \begin{pmatrix} -0.414 \\ -0.116 \\ -0.582 \\ -4.533 \end{pmatrix}$$

$$vs := \mathrm{cspline}(X, Y) \quad dF(x) := \mathrm{interp}(vs, X, Y, x)$$

$$Ot\_Pogresh := \left|df(1.6) - dF(1.6)\right| \cdot \frac{100}{f(1.6)}$$

$$Ot\_Pogresh = 69.034$$

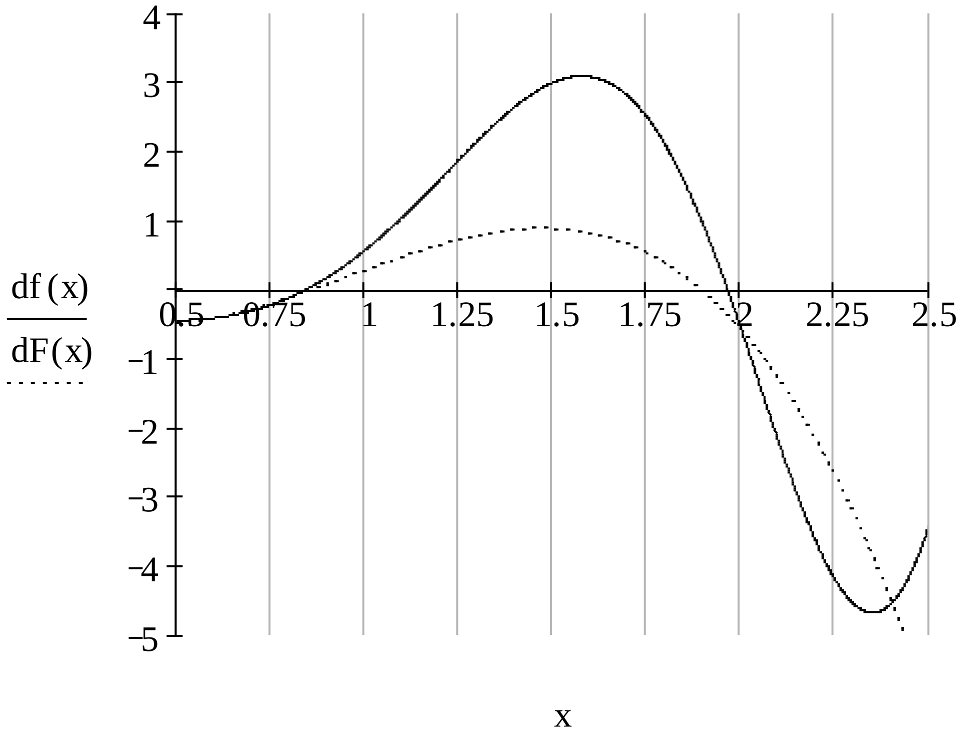


Рисунок А.5 – Кубічна інтерполяція

4 Таблиця похибок функції, похідної й інтеграла (табл. А.1):

Таблиця А.1

Інтерполяція	Похибка, %		
	Функція	Похідна	Інтеграл
Лінійна	18,274	107,074	2,27
Кубічна	16,616	69,034	6,792

$$f(x) := 3 + \sin\left(4 + x^2\right)$$

$$X := \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 2.061 \\ 2.003 \\ 3.989 \\ 2.671 \end{pmatrix}$$

$$Fl(x) := \mathrm{linterp}(X, Y, x)$$

$$vs := \mathrm{cspline}(X, Y) \quad Fk(x) := \mathrm{interp}(vs, X, Y, x)$$

$$\int_{0.5}^{2.4} f(x)\,dx = 5.418 \quad \int_{0.5}^{2.4} Fl(x)\,dx = 5.541 \quad \int_{0.5}^{2.4} Fk(x)\,dx = 5.786$$

$$Ot\_Pogresh\_Fl := |5.418 - 5.541| \cdot \frac{100}{5.418} \quad Ot\_Pogresh\_Fl = 2.27$$

$$Ot\_Pogresh\_Fk := |5.418 - 5.786| \cdot \frac{100}{5.418} \quad Ot\_Pogresh\_Fk = 6.792$$

Рисунок А.6 – Результат виконання завдання

5 *Висновок.* Як відзначалося раніше, у ході виконання завдань використовувалися грубі інтерполяції, оскільки були взяті усього 4 вузли, досить відокремлені один від одного по осі абсцис, що не забезпечує високого ступеня точності. У практичній діяльності число інтерполяцій не обмежено, і його потрібно вибирати так, щоб кінцева різниця $\Delta^N \cdot \mathbf{y_0}$ була постійною з заданою точністю. Тому похибка для лінійної інтерполяції – **18,274%** і для кубічної – **16,616%** досить висока. Від кубічної інтерполяції очікується менша відносна похибка при дотриманні вимог до інтерполяції функції. Те ж можна сказати і про застосування інтерполяції при інтегруванні і диференціюванні.

Приклад 4

1 Для функції $\mathbf{f_1(x)}$, що має кінцеве число екстремумів, знайти ці екстремуми; побудувати графік функції, що містить всі знайдені екстремуми.

2 Для функції $\mathbf{f_2(x)}$, що має нескінченне число екстремумів, знайти два екстремуми; побудувати графік функції, що містить знайдені екстремуми.

3 Побудувати на одному рисунку графіки функцій $\mathbf{f_1(x), f_2(x)}$ і графіки їхніх перших похідних. Проаналізувати взаємозумовленість графіків функції і похідних.

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}^4}; \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\sqrt{1+\cos(\mathbf{x})}}.$$

1 Послідовність дій при виконанні пункту 1:

1.1 Задаємо функцію

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}^4}.$$

1.2 Будуємо графік функції.

1.3 За графіком знаходимо, що початкове значення змінної x для пошуку точок екстремуму вибираємо рівним **-2**, тому нижче графіка задаємо **x: = -2**.

1.4 Задаємо функцію пошуку мінімуму:

P_min: = Minimize (f, x).

1.5 Обчислюємо значення абсциси точки мінімуму: **P = -0,76** і значення функції **f(x)** у цій точці: **f (-0,76) = -0,57**.

1.6 Задаємо функцію пошуку максимуму: **P_max: = Maximize (f, x)**.

1.7 Обчислюємо значення абсциси точки максимуму **P: = 0,76** і значення функції **f(x)** у цій точці **f (0,76) = 0,57**.

Результат виконання завдання в MathCad представлений на рисунку А.7.

2 У випадку функції, що має нескінченне число екстремумів, потрібно задати інтервал зміни аргументу, на якому функція має скінченне число точок екстремуму (один максимум і один мінімум). Для зручності найкраще побудувати графік функції і визначити шуканий діапазон зміни аргументу.

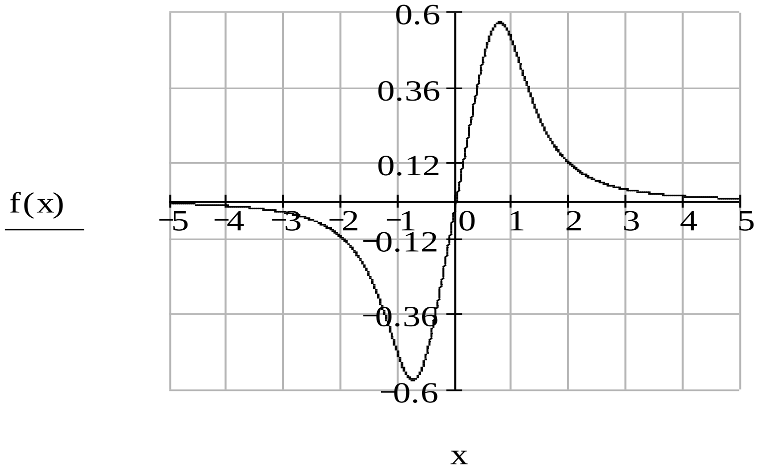
Послідовність дій для виконання пункту 2 завдання:

2.1 Задаємо функцію **f (x): =** .

2.2 Будуємо графік функції.

За графіком видно, що для пошуку локальних екстремумів функції потрібно задати інтервал зміни змінної **x,** який дорівнює, наприклад, **[-5; 2],** тому нижче графіка вводимо початкове наближення для пошуку екстремумів **x: = -2**. Потім записуємо ключове слово **Given** для визначення початку блоку розв’язання (при наборі слова **Given** можна використовувати будь-який шрифт, прописні і малі літери); і обмеження за змінною **x** (діапазон зміни), використовуючи панель інструментів **Boolean Toolbar / Панель інструментів булево**: $x \geq -5$ і $x \leq 2$.

$$f(x) := \frac{x}{1 + x^4}$$



$$x := -2$$

$$P\_min := minimize(f, x)$$

$$P\_min = -0.76$$

$$P\_max := maximize(f, x)$$

$$P\_max = 0.76$$

$$f(P\_min) = -0.57$$

$$f(P\_max) = 0.57$$

Рисунок А.7 – Пошук точок максимуму та мінімуму функції, що має скінченне число екстремумів

2.3 Аналогічно пунктам 1.4-1.7 прикладу 3 визначаємо абсциси точок локальних мінімуму і максимуму функції.

Результат виконання завдання в MathCad представлений на рисунку А.8.

3 Порядок дій для виконання пункту 3 завдання:

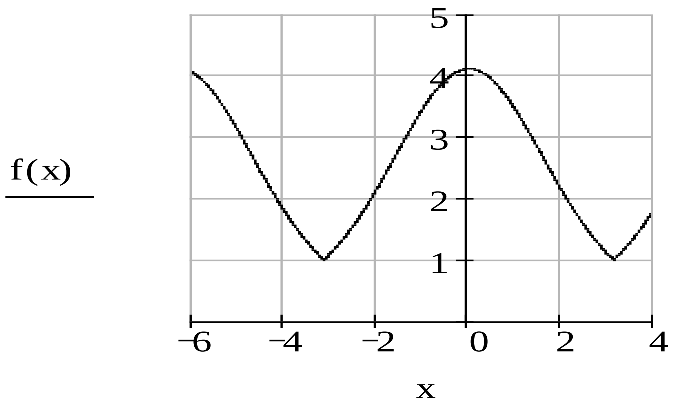
3.1 Задаємо функції **f1 (x) і f2 (x).**

3.2 Будуємо графіки заданих функцій і їхніх похідних.

Результат виконання завдання в MathCad представлений на рисунку А.9.

На підставі отриманих графіків робимо висновок, що функція і її похідна взаємообумовлені, тобто похідна вказує напрямок зміни функції, а в точках, де вона дорівнює нулю, – екстремуми функції.

$$f(x) := e^{\sqrt{1+\cos(x)}}$$



$$x := -2$$

given

$$x \le 2 \quad x \ge -5$$

$$P\_min := \text{Minimize}(f, x) \qquad P\_min = -3.142$$

$$P\_max := \text{Maximize}(f, x) \qquad P\_max = 0$$

$$f(P\_min) = 1$$

$$f(P\_max) = 4.113$$

Рисунок А.8 – Пошук точок максимуму і мінімуму функції, що має нескінченне число екстремумів, з обмеженням діапазону зміни аргументу

Приклад 5

Вирішити систему рівнянь з точністю **0,00001**.

Системи алгебраїчних рівнянь у MathCad можна вирішувати, використовуючи спеціальні блоки, що вирішують.

1 Задаємо початкові наближення для змінних і точність:

$$\mathbf{x{:}=0,\ y{:}=2,\ TOL{:}=1\cdot 10^{-5}}.$$

2 Записуємо ключове слово **Given**.

3 Записуємо систему рівнянь.

4 Задаємо функцію пошуку розв’язання **Find (x, y)** і після набору символу = одержуємо відповідь:

$$\text{find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.331441665257368 \\ -0.662858829250469 \end{pmatrix}.$$

Проводимо перевірку правильності знайденого розв’язання.

$$f2(x) := e^{\sqrt{1+\cos(x)}} \qquad f1(x) := \frac{x}{1 + x^4}$$

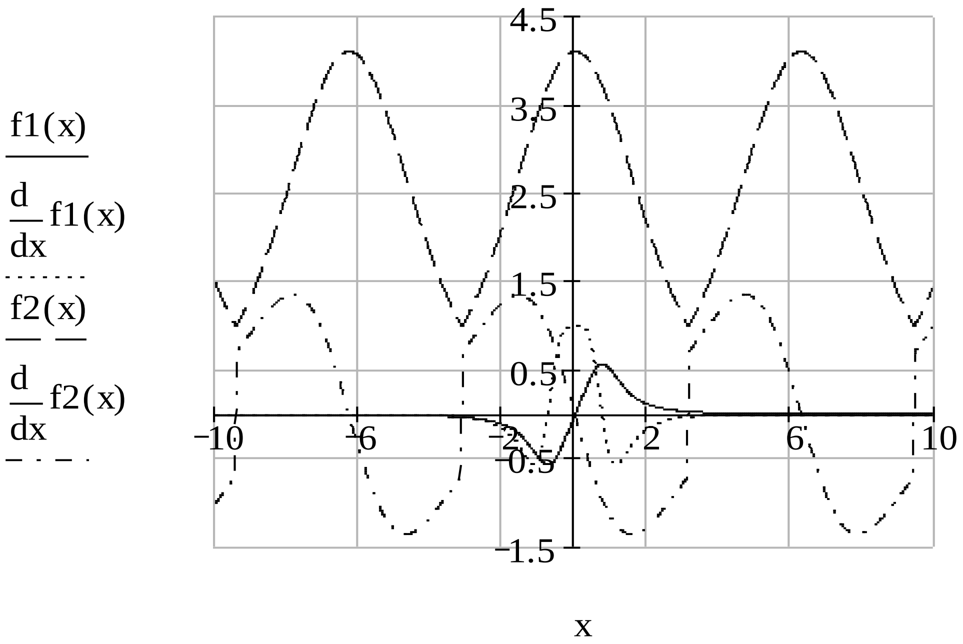


Рисунок А.9 – Побудова графіків функцій і графіків їхніх похідних

Результат розв’язання завдання в MathCad має такий вигляд:

$$x := 0 \qquad y := 2$$

given

$$x^7 \cdot \sqrt{4 \cdot x^2 - y^2} = 0$$

$$x - y + \sqrt{4 \cdot x^2 - y^2} = 1$$

$$\mathrm{find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.331441665257368 \\ -0.662858829250469 \end{pmatrix}$$

$$x := 0.331441665257368$$

$$y := -0.662858829250469$$

$$x - y + \sqrt{4 \cdot x^2 - y^2} = 1$$

$$x^7 \cdot \sqrt{4 \cdot x^2 - y^2} = 2.504 \times 10^{-6}$$

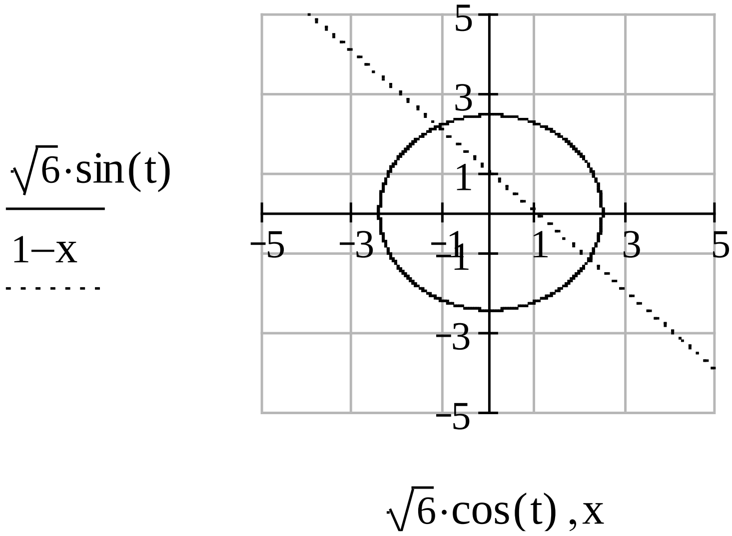
Приклад 6

Знайти точки перетинання окружності $\mathbf{x^2 + y^2 = 6}$ і прямої $\mathbf{x + y = 1}$ (система двох рівнянь із двома невідомими).

З метою спрощення процесу пошуку розв'язання спочатку побудовані графіки функцій (рівняння окружності задане параметрично – $\mathbf{y(t) = a \cdot \sin(t)}$ è $\mathbf{x(t) = a \cdot \cos(t), x - 1}$ – рівняння прямої), потім проведені відповідні обчислення. На рисунку А.10 знайдений тільки один розв'язок. Другий розв'язок рекомендуємо знайти самостійно.

Для контролю:

x2 = -1.158 і **y2 = 2,158**.



$x := 2 \qquad y := -1$

Given

$$x^2 + y^2 = 6$$

$$x + y = 1$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x, y)$$

Перевірка: $x1 = 2.158 \qquad y1 = -1.158$

Рисунок А.10 – Розв’язання системи рівнянь з використанням функції Find

Приклад 7

Для заданих у таблиці А.2 диференціальних рівнянь (спочатку з правою частиною виду **f1**, потім із правою частиною виду **f2**) знайти розв’язання на відрізку **[x_n, x_k]** і побудувати графіки розв’язків.

Таблиця А.2

Ліва частина	Праві частини		Початкові умови		Інтервал	
	f1	f2	$y\ (x_n)$	$y'\ (x_k)$	x_n	x_k
$y'' + 9y$	0	$5\ (x + 2)^2$	0	3	0	5

Скористаємося для пошуку наближеного розв’язку диференціального рівняння методом Рунге-Кутта 4-го порядку з фіксованим кроком інтегрування (функція **rkfixed**).

1 Для розв’язання диференціального рівняння з правою частиною виду **f1** виконуємо наступне:

1.1 Задаємо вектор початкових умов: $\mathbf{y} := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1.2 Задаємо значення точок початку і кінця інтегрування: **x1: = 0**, **x2: = 5**.

1.3 Задаємо число кроків інтегрування: **npoints: = 400**.

1.4 Задаємо функцію-вектор правих частин: $\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ -9 \cdot \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$.

1.5 Задаємо функцію для розв’язання диференціального рівняння:

Z: = rkfixed (y, x1, x2, npoint, D).

Будуємо графік функції розв’язання, де по осі абсцис відкладаємо точки нульового стовпця матриці $\mathbf{Z}^{<0>}$, по осі ординат – стовпця $\mathbf{Z}^{<1>}$.

2 Для пошуку розв’язання диференціального рівняння з правою частиною виду **f2** виконуємо наступне:

2.1 Задаємо вектор-функцію правих частин:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ 5 \cdot (\mathbf{x}+2)^2 - 9 \cdot \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}.$$

2.2 Задаємо функцію для пошуку розв’язання диференціального рівняння: **Z: = rkfixed (y, x1, x2, npoint, D)**.

2.3 Будуємо графік функції розв’язання, де по осі абсцис відкладаємо точки нульового стовпця матриці $\mathbf{Z}^{<0>}$, по осі ординат – $\mathbf{Z1}^{<1>}$.

Результат дій в MathCad представлений на рисунку А.11.

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x1 := 0 \qquad x2 := 5 \qquad npoints := 400$$

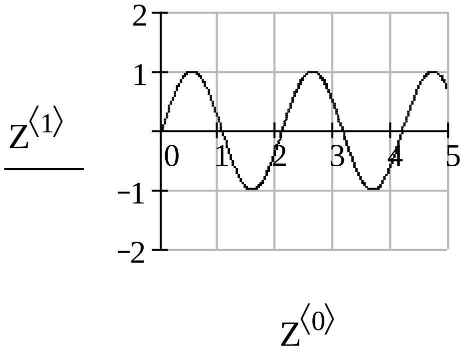
$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -9 \cdot y_0 \end{pmatrix} \qquad Z := rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)$$

$Z^{\langle 0 \rangle} =$

	0
0	0
1	0.013
2	0.025
3	0.038
4	0.05
5	0.063
6	0.075
7	0.088
8	0.1
9	0.113
10	0.125
11	0.137
12	0.15
13	0.163
14	0.175
15	0.188

$Z^{\langle 1 \rangle} =$

	0
0	0
1	0.037
2	0.075
3	0.112
4	0.149
5	0.186
6	0.223
7	0.259
8	0.296
9	0.331
10	0.366
11	0.401
12	0.435
13	0.468
14	0.501
15	0.533



$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -9 \cdot y_0 + 5 \cdot (x + 2)^2 \end{bmatrix} \quad Z := rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)$$

$Z^{\langle 0 \rangle} =$

	0
0	0
1	0.013
2	0.025
3	0.038
4	0.05
5	0.063
6	0.075
7	0.088
8	0.1
9	0.113
10	0.125
11	0.137
12	0.15
13	0.163
14	0.175
15	0.188

$Z^{\langle 1 \rangle} =$

	0
0	0
1	0.039
2	0.081
3	0.126
4	0.175
5	0.226
6	0.281
7	0.338
8	0.398
9	0.461
10	0.527
11	0.596
12	0.668
13	0.742
14	0.819
15	0.898

Рисунок А.11 – Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь і побудова графіків розв’язків

Приклад 8

Інтегрування функції, яку задано таблицею, за допомогою різних методів.

Функція задана за допомогою вектора y

$$y := \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \\ 49 \end{pmatrix} \qquad h := 0.25$$

Кількість інтервалів інтегрування: $m := \mathrm{length}(y) - 1$

$m = 4$

1. Інтегрування за методом трапецій:

$$i := 0..m-1 \qquad I := \left(\frac{h}{2}\right)\cdot\sum_i \left(y_i + y_{i+1}\right) \qquad I = 26.5$$

2. Інтегрування за методом парабол (Сімпсона):

$$i := 1,3..m-1 \qquad j := 2,4..m-2$$

$$I := \left(\frac{h}{3}\right)\cdot\left(y_0 + y_m + 4\cdot\sum_i y_i + 2\cdot\sum_j y_j\right) \qquad I = 26.333$$

3. Інтегрування за заміною y(x) лінійною інтерполяцією

$$i := 0..m \qquad t_i := i\cdot h$$

$$I := \int_0^{m\cdot h} \mathrm{linterp}(t, y, x)\, dx \qquad I = 26.5$$

4. Інтегрування за заміною y(x) кубічною (сплайн) інтерполяцією:

$$s := \mathrm{cspline}(t, y)$$

$$I := \int_0^{m\cdot h} \mathrm{interp}(s, t, y, x)\, dx \qquad I = 26.5$$

5.Пряме інтегрування (для контролю):

$$I := h\cdot\int_3^7 x^2\, dx \qquad I = 26.333$$

Додаток Б

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1 Графік функції. Табулювання функції

Завдання: знайти значення функції (табл. Б.1) у двох довільних точках. Побудувати графік цієї функції на довільному відрізку. Одержати таблицю значень функції на цьому відрізку з довільним кроком.

Таблиця Б.1

№	Функція y (x) =	№	Функція y (x) =
1	$3 – \cos (x^2)$	14	$Ln (4 - \cos x)$
2	$e^{\sin (x + 4)}$	15	$2,5 + \cos (x^2)$
3	$e^{\cos 2x}$	16	$\sin 2x + \cos^2 2x$
4	$2+\ln (3 + \sin x)$	17	$e^{\cos (2 + x)}$
5	$3 + \sin (4 + x^2)$	18	$2 - \sin (2\sqrt{x})$
6	$\ln (5 - \cos x)$	19	$e^{(1+\sin \frac{x}{2})}$
7	$e^{\sin (2x)}$	20	$\ln(3+\sin \frac{x}{2})$
8	$1,5 + \cos (1 + 2x)$	21	$e^{\sin \frac{x}{2}}$
9	$\ln (4 + \sin (2x))$	22	$\ln(3-\cos x^2)$
10	$2 + \cos (x)$	23	$2-\sin \frac{x^2}{2}$
11	$3\sin (e^x)$	24	$\sin 3x+\cos(x+5)$
12	$1,1 + \cos (e^x)$	25	$2+\sin x$
13	$2 + \sin (x^2)$	26	$\sin (2x + 2) - 1$

2 Розв’язання рівнянь і систем

Завдання:

1 Знайти корінь рівняння (табл. Б.2) чисельно і, якщо це можливо, аналітично. Результати порівняти. Виконати перевірку.

2 Знайти чисельно корені полінома (табл. Б.2). Виконати перевірку.

3 Знайти чисельне розв’язання системи із заданою точністю 10-5 (табл. Б.3). Виконати перевірку.

Таблиця Б.2

№	Рівняння	Поліном
1	2	3
1	$e^x + x = 0$	$x^2 - 12x - 4 = 0$
2	$\sin x - \frac{1}{x} = 0$	$x^3 - 24x + 11 = 0$
3	$\cos x - \frac{1}{x+2} = 0$	$x^3 + 2x - 7 = 0$
4	$\cos x + \frac{1}{x+2} = 0$	$x^3 - 21x + 7 = 0$
5	$x = e^{-x+20}$	$x^3 - 5x + 1 = 0$
6	$\cos x^2 - x = 0$	$x^3 - 12x + 5 = 0$
7	$e^{-x} - 2x = 0$	$x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$
8	$\cos x - \frac{1}{x^2+3} = 0.5$	$x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0$
9	$\cos x - \frac{1}{x^2+3} = 0{,}5$	$x^3 - 12x + 5 = 0$
10	$5 \cdot \cos x - x = \cos^2 x$	$x^3 + 6x^2 + 6x - 7 = 0$
11	$x^2 - \cos x^3 = 0$	$x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
12	$e^x + 2\sin x = 0$	$x^3 - 10x^2 + 4x + 9 = 0$
13	$\sin x - \frac{1}{x-5} = 3x$	$x^4 + x - 1 = 0$
14	$\cos x - \frac{1}{x} = 0$	$x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$
15	$5\cos x - x = \cos x$	$x^3 - 34x^2 + 4x + 1 = 0$
16	$\sqrt[4]{2\lvert x\rvert} + x^3 = 0$	$x^3 - 27x - 17 = 0$
17	$\ln(x) + \sqrt{x} = 0$	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

Продовження таблиці Б.2

1	2	3
18	$3^x - 21 + 8x^3 = 9x$	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$
19	$4 - x - \frac{4}{x^2} = 0$	$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 8 = 0$
20	$2\sqrt{x} - x - 0,5 = 0$	$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x + 16 = 0$
21	$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$	$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$
22	$2x^2 + \frac{108}{x^2} - 59 = 0$	$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 4x + 27 = 0$
23	$x^2 + \frac{16}{x} - 16 = 0$	$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 6x + 81 = 0$
24	$2\sqrt{x} - x - 0,5 = 0$	$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 5x + 24 = 0$
25	$\frac{10x}{x^2 + 1} = 3$	$x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x + 54 = 0$

Таблиця Б.3

№	Система	№	Система
1	2	1	2
1	$\begin{cases} x^2 - y^3 = 2 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x^2 + y^3 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x^2 + \cos x = 12 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x^2 - \cos x - 2 = 9 \\ x^2 + y^3 = 9 \end{cases}$
3	$\begin{cases} y^2 - tgx^2 = 2 \\ x + y^3 = 9 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x^2 - y^3 = 2 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x^2 + y^3 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x^2 + \cos x = 12 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 1,5y = 1,3\ln(x+2) \\ \frac{1,3}{3^{2x}} = y \end{cases}$	18	$\begin{cases} 1,5y = 1,3\ln(x+2) \\ 2y = 1,3(x - 1,3)^3 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 1,5y = 1,3\ln(x+2) \\ y = 2tg(x + 1,3) \end{cases}$	19	$\begin{cases} y = \frac{1,3}{3^{2x}} \\ 2y = 1,3(x - 1,3)^3 \end{cases}$

Продовження таблиці Б.3

1	2	1	2
7	$\begin{cases} y = \dfrac{1,3}{3^{2x}} \\ y = 2arctg(x+1,3) \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2y = 1,3(x-1,3)^3 \\ y = 2tg(x+1,3) \end{cases}$
8	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 3x+1 = y \end{cases}$	21	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y-3x-1 = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x^3 + y = 9 \\ y = 3x+5 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = 3x+5 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x^3 + y = 9 \\ y = 3,5x-5 \end{cases}$	23	$\begin{cases} x^2 + y^3 = 16 \\ y = 3x+5 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x^3 - y^{-x} = 9 \\ y-3,5x+5 = 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x^3 + y = 16 \\ y-3x = 5 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x^2 - y^{-x} = 1 \\ y = 3,5x-5 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x^2 + \cos x = 12 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x^2 + y^{-x} = \cos x \\ y = 3,5x-5 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x^2 + \cos x = 12 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$

3 Розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Завдання:

1 Записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (табл. Б.4) у матричному вигляді $A \cdot X = B$**.**

2 Знайти визначник матриці системи **Δ = detA** і зробити висновок про існування розв’язання.

3 Вирішити систему двома способами:

а) у матричній формі: $X = A^{-1} \cdot B$**;**

б) з використанням функції розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь **lsolve (A, B)**.

4 Виконати перевірку правильності розв’язання.

Таблиця Б.4

№	Система
1	2
1	$\begin{cases} 0{,}005x_1+0{,}004x_2+0{,}150x_3=0{,}057 \\ -0{,}090x_1-0{,}033x_2+0{,}0067x_3-0{,}098x_4=-0{,}098 \\ 0{,}150x_1+0{,}033x_2+0{,}050\,x_3+0x_4=0{,}183 \\ 2{,}857x_1+0{,}100x_2-0{,}300x_3+0{,}025x_4=-0{,}041 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 0{,}010x_1+0{,}008x_2+0{,}200x_3+0{,}050x_4=0.186 \\ -0{,}080x_1+0{,}013x_3-0{,}050x_4=-0{,}126 \\ 0{,}250x_1+0{,}067x_2+0{,}067\,x_3+0{,}069x_4=0{,}646 \\ 0{,}057x_1+0{,}150x_2-0{,}267x_3+0{,}050x_4=0{,}0086 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 0{,}015x_1+0{,}012x_2+0{,}250x_3+0{,}100x_4=0{,}388 \\ -0{,}070x_1-0{,}033x_2+0{,}020x_3-0{,}075x_4=-0{,}084 \\ 0{,}350x_1+0{,}100x_2+0{,}075\,x_3+0{,}110x_4=1{,}357 \\ 0{,}0086x_1+0{,}200x_2-0{,}233x_3+0{,}075x_4=0{,}149 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 0{,}020x_1+0{,}016x_2+0{,}300x_3+0{,}150x_4=0{,}662 \\ -0{,}060x_1+0{,}067x_2+0{,}027x_3-0{,}100x_4=0{,}029 \\ 0{,}450x_1+0{,}133x_2+0{,}080\,x_3+0{,}139x_4=2{,}312 \\ 0{,}011x_1+0{,}250x_2-0{,}200x_3+0{,}100x_4=0{,}379 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 0{,}030x_1+0{,}024x_2+0{,}400x_3+0{,}250x_4=1{,}427 \\ -0{,}040x_1+0{,}133x_2+0{,}040x_3+0{,}150x_4=0{,}465 \\ 0{,}650x_1+0{,}200x_2+0{,}086\,x_3+0{,}179x_4=4{,}940 \\ 0{,}017x_1+0{,}350x_2-0{,}133x_3+0{,}150x_4=1{,}111 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 0{,}035x_1+0{,}028x_2+0{,}450x_3+0{,}300x_4=1{,}918 \\ -0{,}030x_1+0{,}167x_2+0{,}047x_3+0{,}175x_4=0{,}788 \\ 0{,}750x_1+0{,}233x_2+0{,}088\,x_3+0{,}195x_4=6{,}611 \\ 0{,}020x_1+0{,}400x_2-0{,}100x_3+0{,}175x_4=1{,}613 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 0{,}040x_1+0{,}032x_2+0{,}500x_3+0{,}350x_4=2{,}481 \\ -0{,}020x_1+0{,}200x_2+0{,}053x_3+0{,}200x_4=1{,}182 \\ 0{,}850x_1+0{,}267x_2+0{,}089\,x_3+0{,}208x_4=8{,}520 \\ 0{,}023x_1+0{,}450x_2-0{,}067x_3+0{,}200x_4=2{,}205 \end{cases}$

Продовження таблиці Б.4

9	$\begin{cases} 0{,}045x_1+0{,}036x_2+0{,}550x_3+0{,}400x_4=3{,}117 \\ -0{,}010x_1+0{,}233x_2+0{,}060x_3+0{,}225x_4=1{,}646 \\ 0{,}950x_1+0{,}300x_2+0{,}090x_3+0{,}220x_4=10{,}664 \\ 0{,}026x_1+0{,}500x_2-0{,}033x_3+0{,}225x_4=2{,}888 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 0{,}050x_1+0{,}040x_2+0{,}600x_3+0{,}450x_4=3{,}825 \\ 0{,}267x_2+0{,}067x_3+0{,}250x_4=2{,}181 \\ 1{,}050x_1+0{,}333x_2+0{,}091x_3+0{,}230x_4=13{,}045 \\ 0{,}029x_1+0{,}550x_2+0{,}250x_4=3{,}661 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 0{,}055x_1+0{,}044x_2+0{,}065x_3+0{,}500x_4=4{,}605 \\ 0{,}010x_1+0{,}300x_2+0{,}073x_3+0{,}275x_4=2{,}785 \\ 1{,}150x_1+0{,}367x_2+0{,}092x_3+0{,}240x_4=15{,}662 \\ 0{,}031x_1+0{,}600x_2+0{,}033x_3+0{,}750x_4=4{,}524 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 0{,}060x_1+0{,}048x_2+0{,}700x_3+0{,}550x_4=5{,}458 \\ 0{,}020x_1+0{,}333x_2+0{,}080x_3+0{,}300x_4=3{,}460 \\ 1{,}250x_1+0{,}400x_2+0{,}092x_3+0{,}248x_4=18{,}515 \\ 0{,}034x_1+0{,}650x_2+0{,}067x_3+0{,}300x_4=5{,}478 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 0{,}065x_1+0{,}052x_2+0{,}750x_3+0{,}600x_4=6{,}383 \\ 0{,}030x_1+0{,}367x_2+0{,}087x_3+0{,}325x_4=4{,}205 \\ 1{,}350x_1+0{,}433x_2+0{,}093x_3+0{,}256x_4=21{,}603 \\ 0{,}037x_1+0{,}700x_2+0{,}100x_3+0{,}325x_4=6{,}522 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 0{,}070x_1+0{,}056x_2+0{,}800x_3+0{,}650x_4=7{,}380 \\ 0{,}040x_1+0{,}400x_2+0{,}093x_3+0{,}350x_4=5{,}021 \\ 1{,}450x_1+0{,}467x_2+0{,}093x_3+0{,}264x_4=24{,}926 \\ 0{,}040x_1+0{,}750x_2+0{,}133x_3+0{,}350x_4=7{,}657 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 0{,}075x_1+0{,}060x_2+0{,}850x_3+0{,}700x_4=8{,}450 \\ 0{,}050x_1+0{,}433x_2+0{,}100x_3+0{,}375x_4=5{,}906 \\ 1{,}550x_1+0{,}500x_2+0{,}094x_3+0{,}248x_4=28{,}484 \\ 0{,}043x_1+0{,}800x_2+0{,}167x_3+0{,}375x_4=8{,}882 \end{cases}$

Продовження таблиці Б.4

16	$\begin{cases} 0{,}080x_1 + 0{,}064x_2 + 0{,}900x_3 + 0{,}750x_4 = 9{,}592 \\ 0{,}060x_1 + 0{,}467x_2 + 0{,}107x_3 + 0{,}400x_4 = 6{,}862 \\ 1{,}650x_1 + 0{,}533x_2 + 0{,}094\,x_3 + 0{,}277x_4 = 32{,}278 \\ 0{,}046x_1 + 0{,}850x_2 + 0{,}200x_3 + 0{,}400x_4 = 10{,}198 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 0{,}085x_1 + 0{,}068x_2 + 0{,}950x_3 + 0{,}800x_4 = 10{,}806 \\ 0{,}070x_1 + 0{,}500x_2 + 0{,}113x_3 + 0{,}425x_4 = 7{,}888 \\ 1{,}750x_1 + 0{,}567x_2 + 0{,}094\,x_3 + 0{,}283x_4 = 36{,}306 \\ 0{,}049x_1 + 0{,}900x_2 + 0{,}233x_3 + 0{,}425x_4 = 11{,}604 \end{cases}$
18	$\begin{cases} 0{,}090x_1 + 0{,}072x_2 + 1{,}000x_3 + 0{,}850x_4 = 12{,}093 \\ 0{,}080x_1 + 0{,}533x_2 + 0{,}120x_3 + 0{,}450x_4 = 8{,}985 \\ 1{,}850x_1 + 0{,}600x_2 + 0{,}095\,x_3 + 0{,}289x_4 = 40{,}569 \\ 0{,}051x_1 + 0{,}950x_2 + 0{,}267x_3 + 0{,}450x_4 = 13{,}101 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 0{,}095x_1 + 0{,}076x_2 + 1{,}050x_3 + 0{,}900x_4 = 13{,}452 \\ 0{,}090x_1 + 0{,}567x_2 + 0{,}127x_3 + 0{,}475x_4 = 10{,}152 \\ 1{,}950x_1 + 0{,}633x_2 + 0{,}095\,x_3 + 0{,}294x_4 = 45{,}067 \\ 0{,}054x_1 + 1{,}000x_2 + 0{,}300x_3 + 0{,}475x_4 = 14{,}688 \end{cases}$
20	$\begin{cases} 0{,}100x_1 + 0{,}080x_2 + 1{,}100x_3 + 0{,}950x_4 = 14{,}883 \\ 0{,}100x_1 + 0{,}600x_2 + 0{,}133x_3 + 0{,}500x_4 = 11{,}389 \\ 2{,}050x_1 + 0{,}667x_2 + 0{,}095\,x_3 + 0{,}300x_4 = 49{,}799 \\ 0{,}057x_1 + 1{,}050x_2 + 0{,}333x_3 + 0{,}500x_4 = 16{,}365 \end{cases}$

4 Обчислення похідних і інтегралів

Завдання:

1 Знайти значення першої похідної функції **f (x)** (табл. Б.5) у точці **x**.

2 Знайти аналітичне вираження (якщо це можливо) для похідної порядку **n** цієї функції.

3 Знайти визначений інтеграл функції **f (x)** на відрізку **[a, b]** (табл. Б.6).

4 Знайти невизначений інтеграл (якщо це можливо) цієї функції.

Таблиця Б.5

№	f(x) =	x =	n =	№	f(x) =	x =	n =
1	e^{-x^2}	2	3	**9**	$\frac{x}{x^2-1}$	2	4
2	sin 2x	5	2	**10**	xe^{5x}	1	3
3	e^{3x}	8	4	**11**	ln3x	3	4
4	$\sqrt{x}$	4	2	**12**	$\sqrt{2x+3}$	4	3
5	$\frac{x^2}{x-1}$	7	6	**13**	$\frac{2x+3}{4x+7}$	5	3
6	$x^2\sin 2x$	3	2	**14**	$\sin^2 x$	6	3
7	$x^3\cos 5x$	1	3	**15**	$\cos^2 x$	7	3
8	$\frac{x-1}{x+1}$	9	4	**16**	$\cos^3 x$	8	3

Таблиця Б.6

№	f(x)	a	b	№	f(x)	a	b
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$\frac{x+1}{\sqrt{x}}$	1	6	**10**	$\sqrt{1+\sin 2x}$	0	4
2	$(x^4+1)x^3$	2	5	**11**	$(2x-3)^{10}$	2	6
3	$\frac{x^2}{1-x^2}$	2	5	**12**	$\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$	1	3
4	$tg^2 x$	-1	1	**13**	$\frac{1}{2+3x^2}$	-1	1
5	$\frac{2x+3}{3x+2}$	0	4	**14**	$\frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}$	2	3
6	$\sqrt{1-\sin 2x}$	4	6	**15**	$\frac{1}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}$	1,5	2,7
7	$(3-x^2)^3$	2	3	**16**	$\frac{1}{1+\cos x}$	1	3
8	$(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}$	1	5	**17**	$\frac{1}{1+\sin x}$	1	3
9	$\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}$	2	3	**18**	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	2	4

Продовження таблиці Б.6

1	2	3	4	**1**	2	3	4
19	$\frac{x^2+3}{x^2-1}$	2	3	**23**	$\frac{x^3}{x^8-2}$	7	8
20	$\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}$	-2	-1	**24**	$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$	4	5
21	$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$	-3	-1	**25**	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	2	3
22	$(2^x+3^x)^2$	1	2	**26**	tgx	-1	1

5 Пошук екстремумів функції

Завдання:

1 Знайти екстремуми і значення функції в точках екстремуму. Перевірити значення похідної в точках екстремуму. Побудувати на одному рисунку графіки функції і її похідної на відрізку, що містить екстремуми (табл. Б.7).

2 Для функції, що має нескінченну кількість екстремумів, знайти їх на заданих відрізках. Використовувати при цьому вирішальний блок (табл. Б.8). Побудувати графік.

Таблиця Б.7

№	**Функція**	**№**	**Функція**
1	$3\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$	**6**	$3\sqrt[3]{(x-1)x}$
2	$1-\sqrt[3]{x^2-2x}$	**7**	$\frac{6\sqrt[3]{6x^2}}{(x+2)^2+8}$
3	$12\sqrt[3]{(x+2)^2}-8x-16$	**8**	$2x-2-3\sqrt[3]{(x-1)^2}$
4	$\frac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2+8}$	**9**	$2+\sqrt[3]{8x(x+2)}$
5	$8x-16-12\sqrt[3]{(x+4)^2}$	**10**	$\frac{3\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2-4x+12}$

Продовження таблиці Б.7

1	2	1	2
11	$\dfrac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{(x+1)^2+8}$	**12**	$3\sqrt[3]{(x-2)^2}-2x+4$
12	$9\sqrt[3]{(x+1)^2}-6x-6$	**13**	$-\dfrac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{(x+3)^2+8}$
13	$1-\sqrt[3]{(x-2)^2-1}$	**14**	$\sqrt[3]{(x+2)^2-1}$
14	$\sqrt[3]{(x+4)x}$	**15**	$\sqrt[3]{(x+4)(x-4)}$
11	$\dfrac{6\sqrt[3]{6(x-3)^2}}{(x-1)^2+8}$	**16**	$\dfrac{3\sqrt[3]{6(x-5)^2}}{(x-3)^2+8}$

Таблиця Б.8

№	Функція	Відрі-зок	№	Функція	Відрі-зок
1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
1	$\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)-1}$	[0; 6]	**11**	$2-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$	[-1; 2]
2	$4-x-\dfrac{4}{x^2}$	[1; 4]	**12**	$\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$	[-1; 6]
3	$x^2+\dfrac{16}{x}-16$	[1; 4]	**13**	$\dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}-1$	[1; 4]
4	$2\sqrt{x}-x-0{,}5$	[0; 4]	**15**	$1-\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$	[1; 5]
5	$1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$	[-1; 5]	**16**	$\dfrac{4x}{x^2+4}$	[-4; 2]
6	$x-4\sqrt{x}+3$	[1; 9]	**17**	$8+\dfrac{8}{x}-\dfrac{x^2}{2}$	[-4; -1]
7	$\dfrac{10x}{x^2+1}-3$	[0; 3]	**18**	$1+\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$	[-2; 4]
8	$-2+\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}$	[-3; 3]	**19**	$\dfrac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$	[-2; 1]
9	$2x^2+\dfrac{108}{x^2}-59$	[2; 4]	**20**	$-\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}+2$	[-5; -2,8]
10	$\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}-1$	[-3; 3]	**14**	$x-4\sqrt{x+2}+5{,}5$	[-1; 7]

6 Інтерполяція функції ступеневими виразами

Завдання:

1 Виконати лінійну і кубічну інтерполяцію за таблицями даних (табл. Б.9). Побудувати графіки. Нанести на них задані точки.

2 Розкласти функцію f (x) (табл. Б.10) у ряд Тейлора порядку **n** навколо точки $\mathbf{x_0}$. Побудувати графік. Нанести задані точки. Порівняти різні види наближення функції.

Таблиця Б.9

№	**Координати точок**					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	X	0,8	0,9	1	1,5	2
	Y	2,5	2,22	2	1,333	1
2	X	0,8	0,9	1	1,5	2
	Y	-0,223	-0,105	0	0,405	0,693
3	X	0,8	0,9	1	1,5	2
	Y	0,928	0,965	1	1,145	1,26
4	X	1	1,5	2	2,5	3
	Y	0,707	0,924	1	0,924	0,707
5	X	4	4,5	5	5,5	6
	Y	2	1,2	0,833	0,629	0,5
6	**X**	1	1.5	2	2,5	3
	Y	0,25	0,333	0,4	0,455	0,5
7	**X**	0,8	0,9	1	1,5	2
	Y	0,527	0,445	0,368	0,105	0,018

Продовження таблиці Б.9

1	2	3	4	5	6	7
8	**X**	0,8	0,9	1	1,5	2
	Y	1,17	1,216	1,26	1,442	1,587
9	**X**	0,8	0,9	2	2,5	3
	Y	3,75	3,333	3	2	1,5
10	**X**	0,8	0,9	1	1,5	2
	Y	0,247	0,482	0,693	1,504	2,079
11	**X**	1	1,5	2	2,5	3
	Y	0,368	0,223	0,135	0,082	0,05
12	**X**	0,8	0,9	1	1,5	2
	Y	-0,14	-0,07	0	0,27	0,462
13	**X**	1,2	1,5	2	2,2	2,3
	Y	0,667	1	2	2,75	3,286
14	**X**	0	0,5	1	1,5	2
	Y	1	1,125	2	4,375	9
15	**X**	1	1,5	2	2,5	3
	Y	0,707	0,583	1	0,383	0,77
16	**X**	0,5	0,7	0,8	1,3	1,8
	Y	-3	-2,44	-2,2	-1,076	0,053
17	**X**	0	0,5	1	1,5	2
	Y	-0,736	-0,963	-1	-1,047	-1,437

Продовження таблиці Б.9

1	2	3	4	5	6	7
18	**X**	1,2	1,7	2	2,5	3
	Y	-4,64	-4,017	-4	-3,953	-3,693
19	**X**	0,1	0,5	1	1,5	2
	Y	-2,262	-1,097	-1	-0,881	-0,266
20	**X**	0	0,5	1	1,5	2
	Y	0,708	0,98	1	0,98	0,708
21	**X**	0	0,5	1	1,5	2
	Y	-0,736	-1,463	-3	-5,547	-9,437
22	**X**	-0,9	-0,5	0	1	1,5
	Y	-0,995	0,864	1	1,386	2,083
23	**X**	0,5	1	2	3	3,5
	Y	-1,255	-0,292	0	-0,292	-1,255
24	**X**	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
	Y	14,987	11,228	7,963	5,19	2,9

Таблиця Б.10

№	**Функція f(x)**	**x_0**	**n**	**№**	**Функція f(x)**	**x_0**	**n**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$\frac{2}{x}$	1	3	**5**	$\frac{x}{3-x}$	2	3
2	$\ln x$	1	4	**6**	x^3+1	1	4
3	$\sqrt[3]{x}$	1	3	**7**	$\cos\frac{\pi}{4}x$	2	3
4	$\sin\frac{\pi}{4}x$	2	4	**8**	$(x-\frac{\pi}{4})\sin x$	$\frac{\pi}{4}$	4

Продовження таблиці Б.10

1	2	3	4	1	2	3	4
9	$\frac{x}{x^2-5x+6}$	5	3	**17**	x^2-2e^{x-1}	1	5
10	$\frac{x}{3+x}$	2	4	**18**	$x^2-4x-(x-2)\ln(x-1)$	2	4
11	e^{-x^2}	1	3	**19**	$x^2-2x-(x-1)\ln x$	1	4
12	$\sqrt[3]{2x}$	1	4	**20**	$\sin^2(x-1)-x^2+2x$	1	5
13	$\frac{3}{x}$	2	3	**21**	$-x^2-2e^{x-1}$	1	5
14	$\ln(2x^2)$	1	4	**22**	$x^2-2x+1+2\ln(x+1)$	0	4
15	e^{-x}	2	3	**23**	$\sin^2(x-2)-x^2+4x-4$	2	5
16	$\cos^2(x-1)-x^2$	1	4	**24**	$x^2-2x-2e^{x-2}$	-2	5

7 Чисельне розв’язання звичайних диференціальних рівнянь

Завдання:

Для заданих у таблиці Б.11 диференціальних рівнянь знайти розв’язання на відрізку **[xn, xk]** спочатку з правою частиною виду **f1**, потім із правою частиною виду **f2.** Побудувати графіки розв’язків.

Таблиця Б.11

№	**Ліві частини**	**Праві частини**		**Початкові умови**		**Інтервал**	
		f1	**f2**	**y (0)**	**y/(0)**	**x_n**	**x_k**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	$y''+\pi y$	0	$1-x^2\sin x$	1	0	1	6
2	$y''+6y'+8y$	0	$6x^2+3\cos x$	-1	0	-1	3
3	$y''+\frac{y}{4}$	0	$(1-2x)e^x$	0	1	0	3
4	$y''+3y'$	0	$e^x\cos 2x$	0	-1	0	5
5	$y''+9y$	0	$5(x+2)^2$	0	3	0	5

Продовження таблиці Б.11

1	2	3	4	5	6	7	8
6	$y''-3y'+2y$	0	$(3x+7)e^{2x}$	0	-3	0	2
7	$y''+4y$	0	x^2+x-1	3	0	3	10
8	$y''+9y$	0	$\cos 4x+1$	-3	0	-3	3
9	$y''+3y'+2y$	0	$(2x+5)e^{2x}$	2	0	-2	2
10	$y''-6y'+8y$	0	$4x^2\sin x$	-2	0	-2	-1
11	$y''-y'$	0	$(16-2x)e^{-x}$	0	2	3	6
12	$y''+4y$	0	$5x^2-1$	0	-2	0	9
13	$y''-9y'+18y$	0	$4(1-x)e^{-x}$	4	0	4	5
14	$y''+4y$	0	$x-x^2+2\cos x$	-4	0	-4	4
15	$y''+6y$	0	$e^{x+2}\cos x$	0	4	0	5
16	$y''+\pi^2 y$	0	$3x^2+2x$	1	0	1	6
17	$y''-3y'+2y$	0	$(12-16x)e^{x}$	-1	0	2	3
18	$y''+y'$	0	$3x^2+2\sqrt{x}+1$	0	1	0	5
19	$y''+5y$	0	$(20x+14)e^{2x}$	0	-1	0	1
20	$y''+16y$	0	$x\cos x+2$	0	3	0	6
21	$y''+y$	0	$1+\cos^3 x$	0	-3	0	7
22	$y''-3y'$	0	$(20x+14)e^{2x}$	3	0	0	1
23	$y''-6y'+8y$	0	$12x^2-6x$	-3	0	0.5	1,5
24	$y''-3y'+2y$	0	$49-24x^2$	2	0	3	4
25	$y''+y$	0	$3x^2+x-4$	-2	0	2	7

8 Статистична обробка одномірного випадкового масиву

Завдання:

Для заданих далі статистичних даних:

1) створити файл вихідних даних під власним ім'ям (наприклад, fio_2.dat);

2) на підставі файлу lab2.mcd створити файл звіту по лабораторній роботі - fio_2.mcd;

3) для своєї вибірки одержати наступні дані: об'єм вибірки n, математичне очікування mean, розмах вибірки R=xmin–xmax, середньоквадратичне відхилення σ, асиметрію Sk, ексцес Ex. За значеннями асиметрії й ексцесу й виду гістограми зробити висновок, чи значно відрізняється розподіл випадкової величини від нормального;

4) побудувати гістограму, вибравши число часткових інтервалів рівним 10. Визначити, чи задовольняє гістограма пропонованим до неї вимогам. Якщо не задовольняє, зменшити, наскільки це припустимо, число часткових інтервалів;

5) знайти ймовірність влучення випадкової величини в заданий проміжок;

6) вважаючи, що технологічний процес відрегульований правильно, а допуск становить 10% від значення контрольованого параметра, знайти випуск придатної продукції в %.

Варіант 1

1.67	2.41	0.79	1.41	2.50	2.29	2.58	1.32
3.75	1.94	0.95	3.48	2.39	1.17	1.92	1.04
2.13	1.58	2.18	2.30	3.03	1.50	2.53	1.91
1.31	3.62	1.49	1.98	2.14	3.35	2.89	2.51
2.31	2.34	1.00	2.03	0.64	2.67	0.09	1.78
3.24	1.91	1.20	1.61	2.35	1.73	2.93	2.32
2.84	1.29	2.28	2.54	1.85	2.40	2.22	2.90
2.37	2.68	2.00	2.70	2.33	2.86	0.36	1.98
2.53	0.80	2.89	0.73	1.01	1.85	2.05	1.16
1.76	2.78	2.43	1.85	1.21	1.53	1.54	2.43

$P(0.93 < X < 1.52) = ?$

Варіант 2

2.46	1.70	2.44	0.82	1.50	2.53	2.32	2.61
1.35	3.78	1.97	0.98	3.51	2.42	1.20	1.95
1.07	2.16	1.61	2.21	2.33	3.06	1.53	2.56
1.94	1.34	3.63	1.52	2.01	2.17	3.38	2.92
2.54	2.34	2.37	1.03	2.06	0.67	2.70	1.12
1.81	3.27	1.94	1.23	1.64	2.38	1.76	2.96
2.35	2.87	1.32	2.31	2.57	1.88	2.43	1.88
2.93	2.40	2.71	2.03	2.76	2.36	2.89	0.39
2.01	2.56	0.83	2.92	0.76	1.04	1.88	2.08
1.19	1.79	2.81	2.46	1.88	1.24	1.56	1.57

$P(0.92 < X < 1.54) = ?$

Варіант 3

1.60	2.49	1.73	2.47	0.85	1.53	2.56	2.35
2.64	1.38	3.81	2.00	1.01	3.54	2.45	1.23
1.98	1.10	2.19	1.64	2.24	2.36	3.09	1.56
2.59	1.97	1.37	3.68	1.55	2.04	2.20	3.41
2.95	2.57	2.37	2.40	1.06	2.09	0.70	2.73
0.45	1.84	3.30	1.97	1.26	1.67	2.41	1.79
2.99	2.38	2.90	1.35	2.34	2.60	1.91	2.46
2.28	2.96	2.43	2.74	2.06	2.76	2.39	2.92
0.42	2.04	2.59	0.86	2.95	0.79	1.07	1.91
2.11	1.22	1.82	2.84	2.49	1.91	1.27	1.59

$P(0.91 < X < 1.55) = ?$

Варіант 4

1.62	1.63	2.52	1.76	2.50	0.88	1.56	2.59
2.38	2.67	1.14	3.84	2.03	1.04	3.57	2.48
1.86	2.01	1.13	2.22	1.67	2.27	2.38	3.12
1.59	2.62	2.00	1.40	3.71	1.58	2.07	2.23
3.44	2.98	2.60	2.40	2.43	1.09	2.12	0.73
2.76	0.18	1.87	3.32	2.00	1.29	1.70	2.44
1.82	3.02	2.41	2.93	1.38	2.37	2.63	1.94
2.49	2.31	2.99	2.46	2.77	2.09	2.79	2.42
2.95	0.45	2.07	2.62	0.89	2.98	0.82	1.10
1.94	2.14	1.25	1.83	2.87	2.52	1.94	1.30

$P(0.90 < X < 1.56) = ?$

Варіант 5

3.31	1.15	1.43	2.27	2.47	1.58	2.18	3.20
2.85	2.27	1.63	1.95	1.96	2.85	2.09	2.83
1.21	1.89	2.92	2.71	3.00	1.74	4.17	2.36
1.37	3.90	2.81	1.59	2.34	1.46	2.55	2.00
2.60	2.78	3.45	1.92	2.95	2.33	1.73	4.04
1.91	2.40	2.56	3.77	3.31	2.93	2.73	2.76
1.42	2.45	1.06	3.09	0.31	2.20	3.66	2.33
1.62	2.03	2.77	2.15	3.35	2.74	3.26	1.71
2.70	2.96	2.27	2.82	2.64	3.32	2.79	3.10
2.42	3.12	2.75	3.28	0.78	2.40	2.95	1.22

$P(0.89 < X < 1.57) = ?$

Варіант 6

2.46	1.70	2.44	0.82	1.50	2.53	2.32	2.61
1.35	3.78	1.97	0.98	3.51	2.42	1.20	1.95
1.07	2.16	1.61	2.21	2.33	3.06	1.53	2.56
1.94	1.34	3.63	1.52	2.01	2.17	3.38	2.92
2.54	2.34	2.37	1.03	2.06	0.67	2.70	1.12
3.24	1.91	1.20	1.61	2.35	1.73	2.93	2.32
2.84	1.29	2.28	2.54	1.85	2.40	2.22	2.90
2.37	2.68	2.00	2.70	2.33	2.86	0.36	1.98
2.53	0.80	2.89	0.73	1.01	1.85	2.05	1.16
1.76	2.78	2.43	1.85	1.21	1.53	1.54	2.43

$P(1.08 < X < 1.68) = ?$

Варіант 7

1.67	2.41	0.79	1.41	2.50	2.29	2.58	1.32
3.75	1.94	0.95	3.48	2.39	1.17	1.92	1.04
2.13	1.58	2.18	2.30	3.03	1.50	2.53	1.91
1.31	3.62	1.49	1.98	2.14	3.35	2.89	2.51
2.31	2.34	1.00	2.03	0.64	2.67	0.09	1.78
1.81	3.27	1.94	1.23	1.64	2.38	1.76	2.96
2.35	2.87	1.32	2.31	2.57	1.88	2.43	1.88
2.93	2.40	2.71	2.03	2.76	2.36	2.89	0.39
2.01	2.56	0.83	2.92	0.76	1.04	1.88	2.08
1.19	1.79	2.81	2.46	1.88	1.24	1.56	1.57

$P(1.07 < X < 1.69) = ?$

Варіант 8

1.62	1.63	2.52	1.76	2.50	0.88	1.56	2.59
2.38	2.67	1.14	3.84	2.03	1.04	3.57	2.48
1.86	2.01	1.13	2.22	1.67	2.27	2.38	3.12
1.59	2.62	2.00	1.40	3.71	1.58	2.07	2.23
3.44	2.98	2.60	2.40	2.43	1.09	2.12	0.73
0.45	1.84	3.30	1.97	1.26	1.67	2.41	1.79
2.99	2.38	2.90	1.35	2.34	2.60	1.91	2.46
2.28	2.96	2.43	2.74	2.06	2.76	2.39	2.92
0.42	2.04	2.59	0.86	2.95	0.79	1.07	1.91
2.11	1.22	1.82	2.84	2.49	1.91	1.27	1.59

$P(1.06 < X < 1.70) = ?$

Варіант 9

1.60	2.49	1.73	2.47	0.85	1.53	2.56	2.35
2.64	1.38	3.81	2.00	1.01	3.54	2.45	1.23
1.98	1.10	2.19	1.64	2.24	2.36	3.09	1.56
2.59	1.97	1.37	3.68	1.55	2.04	2.20	3.41
2.95	2.57	2.37	2.40	1.06	2.09	0.70	2.73
2.76	0.18	1.87	3.32	2.00	1.29	1.70	2.44
1.82	3.02	2.41	2.93	1.38	2.37	2.63	1.94
2.49	2.31	2.99	2.46	2.77	2.09	2.79	2.42
2.95	0.45	2.07	2.62	0.89	2.98	0.82	1.10
1.94	2.14	1.25	1.83	2.87	2.52	1.94	1.30

$P(1.05 < X < 1.71) = ?$

Варіант 10

1.43	2.03	3.05	2.70	2.13	1.48	1.80	1.81
2.70	1.94	3.63	1.06	1.74	2.77	2.56	2.85
1.59	3.08	2.21	1.22	3.75	2.66	1.44	3.19
1.81	2.40	1.85	2.45	2.57	3.30	1.77	2.80
3.18	1.58	2.89	1.76	2.25	2.41	3.62	2.13
1.95	0.45	2.07	2.62	0.89	2.98	0.82	1.10
1.94	2.14	1.25	1.83	2.87	2.52	1.94	1.30
1.62	1.03	2.77	2.15	2.35	2.74	3.26	1.71
2.70	2.96	2.27	1.82	2.64	3.32	2.79	3.10
2.42	1.12	2.75	1.28	0.78	2.40	2.95	1.22

$P(1.04 < X < 1.72) = ?$

Варіант 11

2.46	1.70	1.43	2.27	2.47	1.58	2.32	2.61	
1.35	3.78	1.63	1.95	1.96	2.85	1.20	1.95	
1.07	2.16	1.87	3.32	2.00	1.29	1.53	2.56	
1.94	1.34	2.41	2.93	1.38	2.37	3.38	2.92	
2.54	2.34	2.99	2.46	2.77	2.09	2.70	1.12	
3.24	1.91	2.07	2.62	0.89	2.98	2.93	2.32	
2.84	1.29	1.25	1.83	2.87	2.52	2.22	2.90	
2.37	2.68	2.77	2.15	3.35	2.74	0.36	1.98	
2.53	0.80	2.27	2.82	2.64	3.32	2.05	1.16	
1.76	2.78	2.75	3.28	0.78	2.40	1.54	2.43	$P(1.23 < X < 1.83) = ?$

Варіант 12

3.31	1.15	2.44	0.82	1.50	2.53	2.18	3.20	
2.85	2.27	1.97	0.98	3.51	2.42	2.09	2.83	
2.76	0.18	1.61	2.21	2.33	3.06	1.70	2.44	
1.82	3.02	3.63	1.52	2.01	2.17	2.63	1.94	
2.49	2.31	2.37	1.03	2.06	0.67	2.79	2.42	
2.95	0.45	1.20	1.61	2.35	1.73	0.82	1.10	
1.94	2.14	2.28	2.54	1.85	2.40	1.94	1.30	
1.62	2.03	2.00	2.70	2.33	2.86	3.26	1.71	
2.70	2.96	2.89	0.73	1.01	1.85	2.79	3.10	
2.42	3.12	2.43	1.85	1.21	1.53	2.95	1.22	$P(1.22 < X < 1.84) = ?$

Варіант 13

1.60	2.49	0.79	1.41	2.50	2.29	2.56	2.35	
2.64	1.38	0.95	3.48	2.39	1.17	2.45	1.23	
1.98	1.10	2.18	2.30	3.03	1.50	3.09	1.56	
2.59	1.97	1.49	1.98	2.14	3.35	2.20	3.41	
2.95	2.57	1.00	2.03	0.64	2.67	0.70	2.73	
2.76	0.18	1.94	1.23	1.64	2.38	1.70	2.44	
1.82	3.02	1.32	2.31	2.57	1.88	2.63	1.94	
2.49	2.31	2.71	2.03	2.76	2.36	2.79	2.42	
2.95	0.45	0.83	2.92	0.76	1.04	0.82	1.10	
1.94	2.14	2.81	2.46	1.88	1.24	1.94	1.30	$P(1.21 < X < 1.85) = ?$

Варіант 14

0.67	2.41	1.73	2.47	0.85	1.53	1.58	1.32
0.75	1.94	3.81	2.00	1.01	3.54	1.92	1.04
2.13	1.58	2.19	1.64	2.24	2.36	2.53	1.91
1.31	3.62	1.37	3.68	1.55	2.04	2.89	2.51
2.31	0.34	2.37	2.40	1.06	2.09	0.09	1.78
1.81	2.27	1.87	3.32	2.00	1.29	1.76	2.96
2.35	2.87	2.41	2.93	1.38	2.37	2.43	1.88
2.93	2.40	2.99	2.46	1.77	2.09	2.89	0.39
2.01	2.56	2.07	2.62	0.89	2.98	1.88	2.08
1.19	1.79	1.25	1.83	2.87	2.52	1.56	1.57

$P(1.20 < X < 1.86) = ?$

Варіант 15

1.62	1.63	2.52	1.76	2.50	0.88	1.56	2.59
2.38	2.67	3.14	3.84	2.03	1.04	3.57	2.48
2.86	2.01	3.13	2.22	1.67	2.27	2.38	3.12
1.59	2.62	2.00	1.40	3.71	1.58	2.07	2.23
0.42	2.04	2.59	0.86	2.95	0.79	1.07	1.91
2.11	3.22	1.82	2.84	2.49	2.91	3.27	1.59
1.76	2.50	1.88	3.08	2.47	2.99	1.44	2.43
2.69	2.00	2.55	2.37	3.05	2.52	1.83	2.15
2.85	3.48	3.01	0.51	2.13	2.68	0.95	3.04
0.88	1.16	2.00	3.20	1.31	1.91	2.93	2.58

$P(1.19 < X < 1.87) = ?$

9 Прогноз на підставі лінійної регресії. Точність прогнозу. Тіснота лінійного зв'язку

Завдання:

Використовуючи дані зі свого індивідуального завдання:

1) знайти коефіцієнт кореляції й оцінити за ним тісноту лінійного зв'язку;

2) побудувати графіки лінії регресії з 80%, 95% і 99% довірчими областями;

3) нанести вручну на лінію регресії центр розсіювання;

4) знайти за графіком прогноз у точці, що відповідає центру розсіювання для всіх трьох значень рівня довіри (80%, 95%, 99%), а також прогноз у будь-якій довільній точці з області прогнозів;

5) знайти за графіком напівширину довірчого інтервалу δ_γ у точці, що відповідає центру розсіювання для всіх трьох значень рівня довіри (80%, 95%, 99%): δ_{80}, δ_{95}, δ_{99};

6) оцінити максимальну відносну помилку прогнозу (у відсотках) для всіх трьох значень рівня довіри (80%, 95%, 99%) за формулою $\left|\dfrac{\delta_\gamma}{y_{прогноза}}\right| \cdot 100\%$ (δ_γ і $y_{прогнозу}$ знаходимо за кресленням);

7) зробити висновок про взаємозв'язок рівня довіри γ і відносної похибки прогнозу.

Варіант 1

Фондовіддача й рівень рентабельності по метизному заводу за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	1,24	39,4
2	0,63	23,2
3	1,18	37,2
4	1,12	35,1
5	0,44	20,0
6	1,19	37,9
7	0,48	20,1
8	0,65	23,4
9	0,26	13,4
10	0,75	24,8
11	1,03	32,2
12	0,89	30,2
13	0,16	10,3
14	0,67	23,7
15	0,90	31,3

Варіант 2

Фондовіддача й рівень рентабельності по вагоноремонтному заводу за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	38,9	10,7
2	33,3	11,3
3	37,7	12,2
4	31,1	12,4
5	29,4	10,9
6	37,2	11,3
7	35,6	11,1
8	34,1	14,0
9	0,26	6,8
10	22,8	7,1
11	21,7	8,9
12	26,	4,2
13	23,3	7,4
14	24,5	11,4
15	29,9	4,8

Варіант 3

Фондовіддача й рівень рентабельності по металоремонтних цехах заводів області за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	5,46	27,6
2	5,53	24,9
3	7,05	32,1
4	7,29	37,1
5	7,40	36,9
6	7,10	33,4
7	6,25	31,3
8	8,64	39,3
9	5,18	24,8
10	1,81	20,0
11	2,30	25,5
12	5,53	26,4
13	2,22	20,3
14	3,54	29,1
15	3,23	27,7

Варіант 4

Фондовіддача й рівень рентабельності по хлібозаводах області за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	20,1	12,2
2	64,2	17,6
3	61,1	17,5
4	13,3	10,3
5	10,8	12,8
6	17,2	13,1
7	34,1	16,9
8	32,3	14,4
9	27,8	16,0
10	24,2	16,4
11	55,5	18,3
12	17,1	10,8
13	11,1	10,0
14	25,5	14,0
15	31,1	16,1

Варіант 5

Фондовіддача й рівень рентабельності по станціях ТО області за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	1,25	9,2
2	2,32	14,7
3	1,71	10,3
4	1,64	10,0
5	1,38	9,9
6	1,18	9,1
7	1,44	9,8
8	1,17	6,4
9	1,72	13,0
10	2,21	11,8
11	1,64	13,2
12	1,73	11,4
13	1,17	8,1
14	1,39	9,0
15	1,07	11,1

Варіант 6

Фондовіддача й рівень рентабельності по плодоконсервних заводах області за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	1,08	20,1
2	1,05	12,9
3	0,99	18,0
4	1,02	11,7
5	0,98	17,9
6	1,04	16,8
7	1,03	15,6
8	1,10	14,3
9	1,03	18,1
10	0,89	17,8
11	0,78	13,0
12	0.99	14,2
13	1,43	24,2
14	1,03	20,0
15	1,05	19,3

Варіант 7

Фондовіддача й рівень рентабельності по хлібозаводах області за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	33,4	12,3
2	29,1	14,7
3	25,3	10,9
4	27,1	16,1
5	43,3	22,3
6	47,2	21,1
7	49,3	24,3
8	35,7	13,3
9	45.8	27,6
10	43,4	28,3
11	42,1	25,1
12	40,1	20,2
13	33,3	13,7
14	41,2	19,9
15	34,0	14,2

Варіант 8

У таблиці наведені дані про питому вагу механізованих робіт і продуктивність праці по плодоовочевих заводах області за рік:

№ заводу	Фактор	Показник
	Питома вага механізованих робіт, %	Продуктивність праці, грн
1	84	4300
2	83	4150
3	67	3000
4	63	3420
5	69	3300
6	70	4300
7	73	3420
8	81	4100
9	77	3700
10	72	3500
11	80	4000
12	85	4450
13	83	4270
14	70	3300
15	87	4500

Варіант 9

У таблиці наведені дані про питому вагу простоїв устаткування й рівні рентабельності по молокозаводах області за рік:

№ заводу	Фактор	Показник
	Питома вага простоїв устаткування, %	Рівень рентабельності, %
1	18,1	9,5
2	7,8	19,4
3	7,4	8,7
4	6,4	18,3
5	7,8	16,4
6	17,1	8,8
7	10,2	17,8
8	14,1	13,7
9	20,0	7,0
10	16,7	10,2
11	16,0	10,4
12	20,4	7,3
13	16,2	10,7
14	16,0	14,0
15	20,1	7,3

Варіант 10

У таблиці наведені дані про рівень технічної підготовки робітників і рівні заробітної плати по цукрових заводах області за рік:

№ заводу	Фактор	Показник
	Питома вага робітників з технічною підготовкою, %	Заробітна плата за місяць, грн
1	40	142,20
2	33	152,33
3	37	154,20
4	39	149,95
5	37	154,37
6	41	149,80
7	49	170,11
8	38	168,33
9	55	193,30
10	43	172,72
11	56	189,39
12	47	187,01
13	44	173,40
14	55	187,87
15	54	184,20

Варіант 11

Фондовіддача й рівень рентабельності по заводах металевих виробів за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	20,0	2,0
2	12,8	1,8
3	9,2	1,1
4	5,3	3,5
5	18,6	10,1
6	10,8	3,3
7	28,7	24,2
8	13,8	1,9
9	28,6	20,8
10	22,9	19,2
11	14,0	3,4
12	13,0	2,7
13	12,8	1,4
14	25,0	20,1
15	13,8	7,8

Варіант 12

Фондовіддача й рівень рентабельності по вагоноремонтних заводах за рік характеризуються такими даними:

№ заводу	Фактор	Показник
	Фондовіддача, грн	Рівень рентабельності, %
1	80,0	20,0
2	87,2	37,5
3	90,8	43,4
4	94,7	45,6
5	81,4	23,4
6	89,2	25,0
7	71,3	17,2
8	86,2	33,3
9	71,4	15,0
10	77,7	18,7
11	86,0	24,8
12	87,0	34,5
13	87,2	33,1
14	75,0	19,2
15	86,2	31,8

Варіант 13

У таблиці наведені дані про питому вагу в товарообігу споживчої кооперації продукції власного виробництва й рівні рентабельності підприємств області за рік:

№ підприємства	Фактор	Показник
	Питома вага продукції власного виробництва, %	Рівень рентабельності, %
1	25,2	9,5
2	58,2	9,4
3	42,2	8,7
4	46,8	8,3
5	60,5	6,4
6	66,1	8,8
7	26,5	7,8
8	59,9	13,7
9	43,2	7,0
10	47,8	6,7
11	61,8	10,4
12	68,1	7,3
13	32,0	8,9
14	60,2	9,4
15	44,2	7,3

Варіант 14

У таблиці наведені дані про відносний рівень витрат обігу й рівні рентабельності по магазинах промислових товарів за рік:

№ магазину	Фактор	Показник
	Відносний рівень витрат обігу, %	Рівень рентабельності, %
1	7,89	8,9
2	14,41	4,3
3	6,01	10,2
4	9,17	4,9
5	6,78	8,3
6	8,91	7,8
7	6,17	13,1
8	10,11	4,9
9	5,98	13,3
10	6,10	10,7
11	5,90	13,7
12	8,13	5,6
13	9,01	4,7
14	6,00	11,1
15	6,13	10,8

Варіант 15

У таблиці наведені дані про питому вагу механізованих робіт і продуктивність праці по плодоовочевих заводах області за рік:

№ заводу	Фактор	Показник
	Питома вага механізованих робіт, %	Продуктивність праці, грн
1	84	4300
2	83	4150
3	67	3000
4	63	3420
5	69	3300
6	70	4300
7	73	3420
8	81	4100
9	77	3700
10	72	3500
11	80	4000
12	85	4450
13	83	4270
14	70	3300
15	87	4500

ЛІТЕРАТУРА

1 Дьяконов В. MathCad 2001: Учебный курс. – СПб: Питер, 2001. – 624 с.

2 Плис А. И. MathCad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 656 с.

3 Херхагер М. MathCad 2000: полное руководство / М. Херхагер. Х. Партолль; Пер. с нем.; Под ред. К. Ю. Королькова. – К.: ВНУ,2000. – 416 с.

4 Кухакер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Кухакер, К. Моулер, С. Нэш. – 2-е изд., стер. – М.: Мир, 2001. – 575 с.

5 Ивановский Р. И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCad PRO:Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2003. – 431 с.

6 Кудрявцев Е. М. MathCad 8. – М.: ДМК, 2000. – 320 с.

Навчальне видання

ВАСИЛЬЄВА Людмила Володимирівна,
ГОНЧАРОВ Олександр Андрійович,
КОНОВАЛОВ Владилен Анатолійович,
СОЛОВЙОВА Ніна Андріївна

Чисельні методи розв’язання інженерних задач у пакеті MathCAD

Курс лекцій та індивідуальні завдання

Навчальний посібник
з дисципліни «*Інформатика*»
для студентів вищих навчальних закладів

Редактор *О. М. Болкова*

Комп’ютерна верстка *О. П. Ордіна*

Підп. до друку 04.12.06. Формат 60 x 84/16.
Папір газетний. Ум.друк. арк. 6,75. Обл.-вид. арк. 4,91.
Тираж 190 прим. Зам. № 338.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.